Висока пословно-техничка школа струковних студија Ужице

СТАТИСТИЧКЕ МЕТОДЕ УПРАВЉАЊА КВАЛИТЕТОМ

- ПРИРУЧНИК -

Милутин Р. Ђуричић
Милан М. Ђуричић
Слободан М. Петровић

Ужице, 2016.

СТАТИСТИЧКЕ МЕТОДЕ УПРАВЉАЊА КВАЛИТЕТОМ – ПРИРУЧНИК

Висока пословно - техничка школа струковних студија Ужице
Трг Светог Саве 34, Ужице
телефони: (+381-31) 512-013; 512-789; 513-385
web: www.vpts.edu.rs

MODERNIZATION AND HARMONIZATION OF TOURISM STUDY PROGRAMS IN SERBIA

Tempus

The publication has been funded within the freamework of the European Union Tempus programme which is funded by the Directorate General for Development and Co-operation - EuropeAid and the Directorate General for Enlargement.

This publication reflests the views only of the authors, and the Education, Audiovisual and Culture Executive Agency and the European Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information therein.

Project No. 544543-TEMPUS-1-2013-1-RS-TEMPUS-JPCR

ISBN 978-86-83573-85-1

Милутин Р. Ђуричић
Милан М. Ђуричић
Слободан М. Петровић

СТАТИСТИЧКЕ МЕТОДЕ УПРАВЉАЊА КВАЛИТЕТОМ – ПРИРУЧНИК

Ужице, 2016.године

Милутин Р. Ђуричић,

Милан М. Ђуричић и

Слободан М. Петровић

СТАТИСТИЧКЕ МЕТОДЕ УПРАВЉАЊА КВАЛИТЕТОМ – ПРИРУЧНИК

Рецензенти:

Проф. др Љубодраг Ђорђевић

Проф. др Загорка Аћимовић

Главни и одговорни уредник MHTSPS издања:

Проф. др Милутин Р. Ђуричић

Издавач:

Висока пословно-техничка школа

Струловних студија Ужице, тел.факс 031-512-013

За издавача:

Проф. др Ивана Ћировић, Директор

Тираж:

125 примерака

Комјутерска припрема:

Слободан М. Петровић

Дизајн корица:

Милисав Шуљагић

Штампа:

«Графопластплус» Ужице

САДРЖАЈ

ПОПИС СЛИКА

ПОПИС ТАБЕЛА

ПРЕДГОВОР

Друштвено економски развој је императив сваког друштва које води рачуна о својој садашњости, а поготово о својој будућности. Развијени своје предности остварују, поред осталог, захваљујући оствареном квалитету својих производа. Уређен пословни систем који делује проактивно и превентивно лако крчи пут до лидерске позиције.

Успешни су, одавно, своје процесе докуметовали и стандардизовали. По њиховим примерима донети су и Међународни стандарди квалитета из серије ИСО 9000, који су наметнути свим оним који желе да уђу светску тржишну утакмицу. Већина теоретичара и практичара квалитета се слаже да основу доброг пословања чини добро осмишљен маркетиншки приступ. У таквом амбијенту треба имплементирати систем менаџмента квалитетом заснован на важећем ИСО 9001 стандарду.

Опстанка, а погототову развоја нема без сталног побољшања квалитета сваког, па и туристичког, пословног система. Добро осмишљеним Пројектима се крчи пут до тоталног управљања квалитетом или бездефектне производње. Реализација пројекката унапређења се не може замислити без примене одговарајућих алата и метода унапређења квалитета (статистичке методе, менаџерске и инжењерске методе).

Статистичке методе унапређења квалитета преставњају моћан алат за унапређење квалитета. Стога аутори овог Приручника су се определили да за запослене у туризму и студенте високошколских установа ураде Приручник који ће им омогућити да поступно овладају статистичким методама унапређења квалитета.

Разноврсност статистичких метода у управљању квалитетом захтева неопходне математичко-статистичке подлоге. У овој књизи описане су најчешће примењивани појмови и методе у пракси, довољне да се илуструје статистички приступ третирању проблема менаџмента квалитетом.

Статистичке методе се користе у свим фазама "петље квалитета". Са тог разлога ће даље излагање обухватити:

- *статистичку анализу и оцену грешака мерења,*
- *тестирање статистичких хипотеза,*
- *метод кривих распореда,*
- *методе планова пријема,*
- *метод контролних карата, и*
- *корелациону и регресиону анализу.*

С обзиром на ефекте који су постигнути у Јапану кроз примену тзв. седам полуга за контролу квалитета даћемо и неопходне информације за *Паретов дијаграм, и Поређење два нивоа (стратификација).*

Аутори су поред класичног приступа обради података дали и примену рачунарских програма за израчунавања којима се може значајно убрзати процес унапређења квалитета. Коришћена је апликација Microsoft Excel са кратким упутством како се исте користе за шта је потребно основно познавање рада у Excel-у.

Овај Приручник је резултат тимског рада три аутора из две високошколске установе из Србије. Он је део наставног материјала за обуку запослених у туризму, али и за студенте. Приручник је креиран у оквиру реализације ТЕМПУС пројекта број 544543 "Модернизација и усклађивање студијских програма из облати туризма у Србији", чији је носилац Издавач овог Приручника, а Координаттор Проф. др Милутин Р. Ђуричић, коаутор овог Приручника..

Аутори

УВОД

Развој квалитета до тоталног менаџмента квалитетом захтева системски приступ. Он подразумева и примену статистичких метода унапређења квалитета.

Статистичке методе заузимају истакнуто место у управљању квалитетом. При томе, одлуке о квалитету производа и процеса доносе се на основу анализе података репрезентативног узорка. Ту је присутно стохастичко подручје одлучивања код кога се може утврдити статистичка законитост варијација у процесима или појавама које се прате.

Разноврсност статистичких метода у управљању квалитетом захтевају неопходне математичко-статистичке подлоге. У овој књизи ограничићемо се на опис најчешће примењиваних појмова и метода у пракси, довољних да се илуструје статистички приступ третирању проблема менаџмента квалитетом. Такође, дати су примери статистичких функција које постоје у апликацији Microsoft Excel са кратким упутством како се исте користе за шта је потребно основно познавање рада у Excel-у.

Статистичке методе се користе у свим фазама "петље квалитета". Са тог разлога ће даље излагање обухватити:

- *статистичку анализу и оцену грешака мерења,*
- *тестирање статистичких хипотеза,*
- *метод кривих распореда,*
- *методе планова пријема,*
- *метод контролних карата, и*
- *корелациону и регресиону анализу.*

С обзиром на ефекте који су постигнути у Јапану кроз примену тзв. седам полуга за контролу квалитета рећи ћемо, у овом поглављу и неопходне информације и за *Паретов дијаграм, и Поређење два нивоа (стратификација).*

1. СТАТИСТИЧКА АНАЛИЗА И ОЦЕНА ГРЕШАКА МЕРЕЊА

1.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ПАРАМЕТРИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА РАСИПАЊЕ ВЕЛИЧИНА

Производни радници свакодневно су сведоци да на истој машини, са истим алатима и под истоветним условима добијају се обрадци чије се димензије, међусобно, разликују. С друге стране контролори, мерећи један комад истим мерилом добијају различите резултате. У оба ова случаја уочиће се, да су све вредности распоређене око неке средње вредности са позитивним и негативним одступањима од ње. Та позитивна и негативна одступања од средње вредности зовемо расипањем величине и оцењујемо га помоћу статистичких карактеристика.

Да би се прегледно приказали подаци добијени мерењем извесне карактеристике за групу од више примерака истог производа поступа се на следећи начин.

Распон између најмање и највеће измерене вредности издели се на известан број подједнаких интервала, који се називају групним интервалима. За оријентацију при избору броја интервала може се узети квадратни корен из броја података. Утврди се затим фреквенција сваког групног интервала, тј. број примерака чија измерена вредност пада у сваки поједини интервал.

Поступак којим се ово постиже очигледан је из табеле 1.1, где су приказани подаци о пречнику у mm за 160 примерака вратила.

Табела 1.1. Приказ расподеле резултата мерења на групне интервале (распоред фреквенција)

Групни интервал		**Фреквенција**
89,90 до 89,92	/	1
89,93 до 89,95	//// ///	8
89,96 до 89,98	//// //// //// ////	19
89,99 до 90,01	//// //// //// //// //// ////	30
90,02 до 90,04	//// //// //// //// //// //// //// //// //	42
90,05 до 90,07	//// //// //// //// //// //// ///	33
90,08 до 90,10	//// //// //// /	16
90,11 до 90,13	//// ///	8
90,14 до 90,16	/	1
90,17 до 90,19	//	2
		160

Excel =SUM(C2:C11)

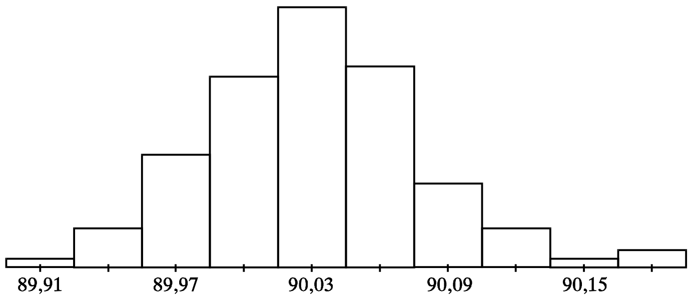
Функција SUM(број1,број2,...) се користи за израчунавање збира бројева, најчешће кад су бројеви у низу (у ј едној колони или врсти).

Табела 1.1. у првом ступцу садржи групне интервале, а у другом фреквенције, и назива се распоред фреквенција. Каткад се уместо ових тзв. **апсолутних фреквенција** групних интервала у распоред уносе **релативне фреквенције**, тј. количници између апсолутних фреквенција и укупног броја измерених примерака. На пример, у горњем распореду релативна фреквенција групног интервала 89,99 до 90,01 износи 30/160 = 0.1875, а релативна фреквенција групног интервала 90,08 до 90,10 износи 16/160 = 0.1 .

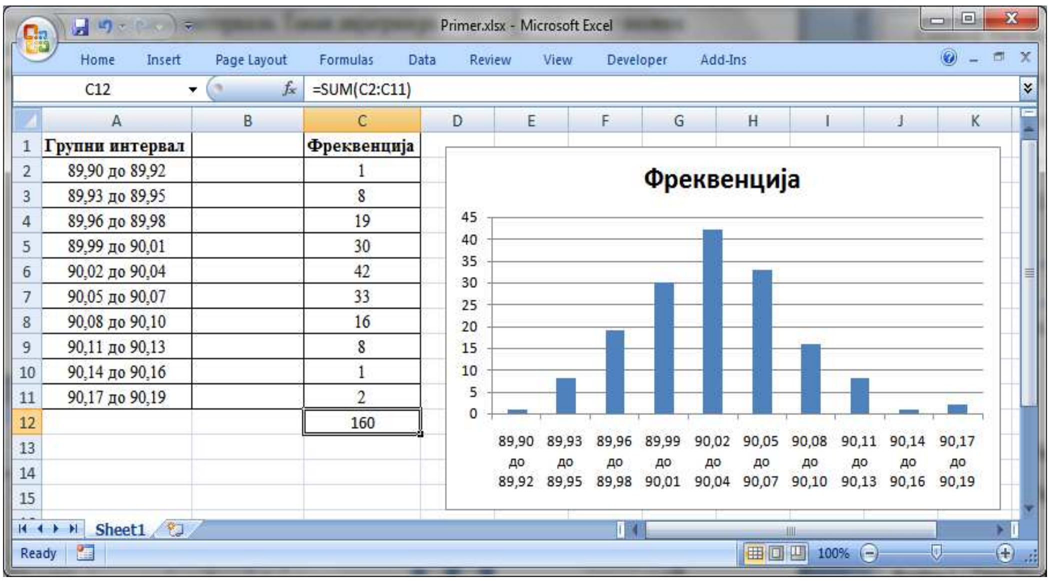
Excel =30/160

Графички се распоред фреквенција може приказати, на пример, на тај начин што се на апсцисну осу нанесу граничне вредности групних интервала и над сваким групним интервалом конструише правоугаоник чија висина показује фреквенцију тог групног интервала. Такав дијаграм распореда фреквенције назива се хистограм (слика 1.1).

Excel кликнути на картицу Insert, Charts, Column – изабрати дијаграм колоне.



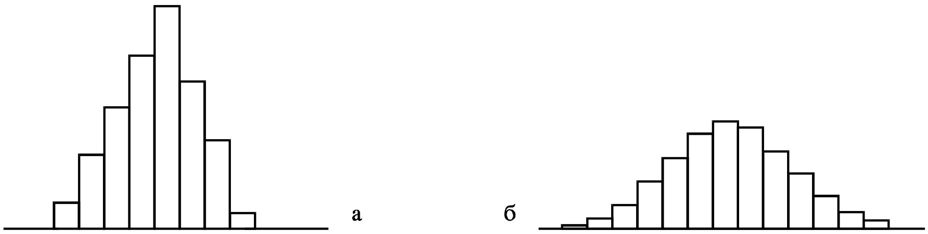
Слика 1.1. Хистограм вероватноће за пример из табеле 1.1.



Слика 1.2. У Excel-u урађен пример из табеле 1.1.

1.2. ОСНОВНЕ ОДЛИКЕ РАСПОРЕДА ФРЕКВЕНЦИЈА

За практичне сврхе често је довољно имати само грубу слику распореда фреквенција. Таква слика имаће се ако се знају следеће одлике распореда фреквенција: типична вредност тј. средњи положај око кога су распоређене остале вредности (слика 1.3), и приказ асиметрије груписања вредности (слика 1.4).



Слика 1.3. Приказ расипања вредности око средњег положаја (а-мање расипање него распоред б)

На пример, основне карактеристике распореда фреквенција наведеног у табели 1.1. могу се формулисати на следећи начин:

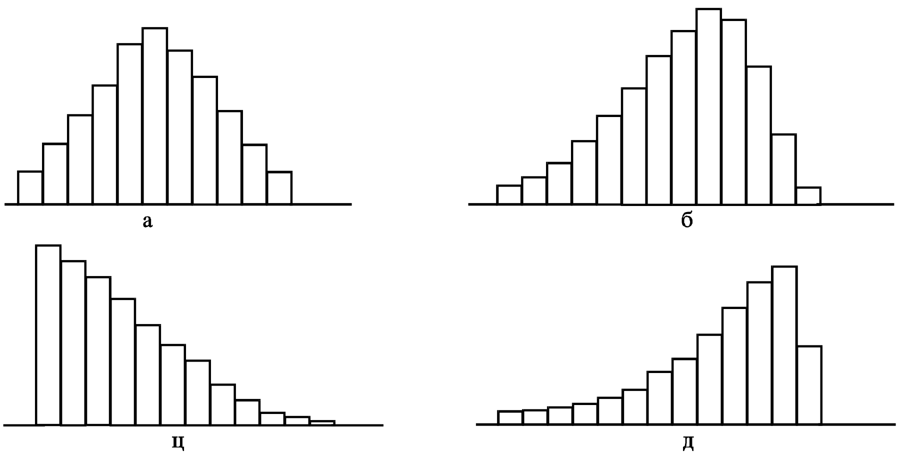
а) најчешће се јављају пречници дужине између 90.02 и 90.04 мм.

б) разлика између највећег и најмањег пречника за 160 посматраних вратила износи 0,29 мм,

ц) распоред је приближно симетричан.

Excel- б) Функције MAX и MIN дају максималну, тј. минималну вредност .

Од нарочитог су значаја прве две одлике распореда фреквенција. У контроли стабилности као мерило типичне вредности служи аритметичка средина свих измерених вредности, а за оцену расипања служи или распон или стандардна девијација.



Слика 1.4. Приказ асиметрије груписања вредности у односу на средњи положај(а-прибижно симетричан; б, ц , д - асиметричан распоред)

1.3. АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА

Аритметичка средина $\bar{x}$ (x са цртом) неког низа вредности x_1, x_2,...x_n једнака је збиру тих вредности подељенон са n:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \tag{1.1}$$

Аритметичка средина се може израчунати на два начина:
- из негруписаних података израчунава се директно без претходног формирања распореда фреквенција;
- из груписаних података најпре се формира распоред фреквенција, па се аритметичка средина израчуна из тог распореда.

Израчунавање из груписаних података простије је, али само ако је број података велики. Такав начин израчунавања доводи до извесне грешке јер се заснива на претпоставци да се све измерене вредности које су сврстане у један групни интервал, подударају са средином тог групног интервала, али је та грешка практично занемарљива.

Ако су x_1, x_2, ...x_n измерене вредности првог, другог, ... n-тог примерка једног производа, артиметичка средина тих негруписаних вредности израчунава се по обрасцу:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1.2}$$

где $\sum_{i=1}^{n}x_i$ значи збир свих вредности x од x_1 до x_n.

Пример 1.1. Ако су измерене вредности износиле 90,3; 90,4; 89,8 и 90,5, аритметичка средина је:

$$\frac{90.3+90.4+89.8+90.5}{4}=90.25$$

Excel =AVERAGE(90.3,90.4,89.8,90.5)

Израчунавање аритметичке средине из груписаних података врши се преко основног или скраћеног поступка.

Ако су X_l, X_2, ... $X_к$ средине првог, другог, ..., к-тог групног интервала, а $f_1, f_{2,\ldots,} f_k$ апсолутне фреквенције тих интервала, аритметичка средина тог распореда добија се основним поступком на основу формуле:

$$\overline{x}=\frac{f_1\cdot x_1+f_2\cdot x_2+\ldots+f_k\cdot x_k}{f_1+f_2+\ldots+f_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=\frac{1}{n}\sum f_i\cdot x_i \tag{1.3}$$

Пример 1.2. Аритметичка средина распореда фреквенције приказаног на табели 1.1. износи:

$$\frac{89.91\cdot 1+89.94\cdot 8+\ldots+90.18\cdot 2}{160}=90.030$$

Постоји неколико скраћених поступака за израчунавање аритметичке средине. Овде се, примера ради, наводи само један од тих поступака.

Овај поступак може се применити само у случају ако су сви групни интервали исте ширине. Тај услов је испуњен ако је разлика горње и доње границе сваког групног интервала иста (у примеру у табели 1.1. та разлика је 89,92 - 89,90 = 89,95 - 89,93 = ... = 0,02). У том случају се ширина групног интервала d израчунава као разлика између горње границе једног групног интервала и горње границе претходног интервала (у нашем примеру d = 89,95 - 89,92 = 0,03).

Поступак се састоји у следећем: Означи се један (свеједно који) од средњих групних интервала са 0 (обично онај који има највећу апсолутну фреквенцију), групни интервали који му следе редом са 1, 2, ..., групни интрервал који му претходи са -1, и остали који му претходе редом уназад са -2, -3, ... на тај начин формира се низ целих бројева нпр. -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ако се ти бројеви сматрају као средине групних интервала једног замишљеног распореда чије фреквенције су $f_1, f_2, \ldots f_k$, онда се поступком наведеним у обрасцу 1.3. може израчунати аритметичка средина $\overline{b}$ - тога распореда, помоћу које се израчуна тражена аритметичка средина стварног распореда по обрасцу:

$$\overline{x}=a+d\cdot\overline{b} \tag{1.4.}$$

где је a - средина групног интервала коме је додељена ознака 0.

Пример 1.3. Ако шести по реду групни интервал шести по реду групни распореда приказаног у табели 1, чија средина је a = 90,0; a d = 0,03 означимо са 0, тада је $b_1 = -5$, $b_2 = -4$, $b_3 = -3$, ..., $b_{10} = 4$.

Како је:

$$\overline{b}=\frac{(-5)\cdot 1+(-4)\cdot 6+(-3)\cdot 18+\ldots+4\cdot 2}{160}=-1$$

то је

$$\overline{x}=90.06+(-1)\cdot 0.03=90.03$$

1.4. РАСПОН

Распон R је разлика између највеће (x_{max}) и најмање ($x_{мин}$) измерене вредности:

$$R = x_{max} - x_{мин} \tag{1.5.}$$

Пример 1.4. Ако су измерене вредности износиле 90,3; 90,4; 89,8 и 90,5, највећа вредност је x_{max} = 90,5, најмања $x_{мин}$ = 89,8; распон износи :

$$R = 90,5 - 89,8 = 0,7.$$

Excel = MAX(90.3,90.4,89.8,90.5) - MIN(90.3,90.4,89.8,90.5)

Распон се користи као мера расипања само ако се ради о малом броју вредности (мање од 10), јер може дати погрешну слику о расипању распореда код кога би све измерене вредности биле густо концентрисане, изузев једне изузетно екстремне вредности.

Пошто се рачуна из малог број података, није потребан никакав поступак за израчунавање распона из груписаних података.

1.5. СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

Стандарда девијација је погодно мерило за оцену расипања. Стандардна девијација σ за n вредности x_1, x_2, ..., x_n је квадратни корен из аритметичке средине квадрата разлика између појединих вредности x_i и аритметике средине $\bar{x}$ тих n вредности:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2}{n}} = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}} \tag{1.6.}$$

Из овог обрасца изведени су следећи обрасци, који су подеснији за примену при израчунавању из негруписаних података:

$$\sigma = +\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2} = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2} \tag{1.7.}$$

Пример 1.5. Ако су измерене вредности износиле 90,3; 90,4; 89,8 и 90,5 тада је аритметичка средина 90.25, па је стандардна девијација једнака

$$\sigma = +\sqrt{\frac{90{,}3^2+90{,}4^2+89{,}8^2+90{,}5^2}{4}-90{,}25^2} = +\sqrt{0{,}0725} = 0{,}27$$

Excel = STDEVP(90.3,90.4,89.8,90.5)

Функција STDEVP (број1,број2,...) израчунава стандарду девијацију.

Израчунавање стандардне девијације из груписаних података врши се основним или скраћеним поступком.

Ако су $X_1, X_2, ... X_к$ средине првог, другог, ... к-тог групног интервала, а $f_1, f_2, \ldots, f_k$ апсолутне фреквенције тих интервала, стандардна девијација тог распореда добија се основним поступком по обрасцу:

$$\sigma = +\sqrt{\frac{f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \ldots + f_k \cdot x_k^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \bar{x}^2} \qquad (1.8.)$$

где је $\bar{x} = \dfrac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_k \cdot x_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k}$ аритметичка средина посматраног распореда.

Пример 1.6. Стандардна девијација распореда фреквенција приказаног на табели 1 износи:

$$\sigma = +\sqrt{\frac{1 \cdot 89{,}91^2 + 8 \cdot 89{,}94^2 + \ldots + 2 \cdot 90{,}18^2}{160} - 90{,}03^2} = 0{,}47$$

За израчунавање стандардне девијације има више скраћених поступака. Овде се, примера ради, излаже један од тих скраћених поступака.

Означи се један од средњих групних интервала са 0, групни интервали који му следе редом са 1, 2, 3, ... На тај начин првом групном интервалу одговараће неки цео број b_1, другом b_2, ..., последњем $b_к$. Нека d означава ширину групног интервала. (Претпоставља се, и само према тој претпоставци важи образац који ће се навести, да су сви групни интервали исте ширине).

Стандардна девијација σ распореда чије су средине групних интервала x_1, x_2,... $x_к$, а одговарајуће фреквенције $f_1, f_2, \ldots, f_k$ добија се по обрасцу:

$$\sigma = d \cdot \sigma_b \qquad (1.9.)$$

где σ_b означава стандардну девијацију замишљеног распореда чије су средине групних интервала b_1, b_2,..., $b_к$, а одговарајуће фреквенције $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Стандардна девијација σ израчунава се по поступку наведеном у тачки 1.8.

Пример 1.7. Ако се шести по реду групни интервал распореда приказаног у табели 1.1. означи са 0, тада је b_1 = -5, b_2 = -4, ..., b_{10} = 4. Како је d = 0,03, а b = -1, то ће бити:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(-5)^2 \cdot 1 + (-4)^2 \cdot 8 \ldots + 4^2 \cdot 2}{160} - (-1)^2} = +\sqrt{2{,}5938} = 1{,}61, \text{ па је}$$

$$\sigma = 0{,}03 \cdot 1{,}61 = 0{,}0483$$

У неким стандардима се користи следећи образац за оцену стандардне девијације основног скупа s на основу узорка величине n:

$$s = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad (1.10)$$

У табели 1.2. прегледно је приказан пример истовременог израчунавања аритметичке средине и стандардне девијације за распоред фреквенција према табели 1.1.

Средина произвољно изабраног (четвртог) групног интервала коме је додељена ознака 0 је a = 90,00.

$$\bar{b} = \frac{\sum f_i \cdot b_i}{n} = \frac{+167}{160} = 1{,}044$$, ширина групног интервала d = 0,03

Аритметичка средина по скраћеном поступку добија се:

$$\bar{x} = a + d\bar{b} = 90{,}00 + 0{,}03 \cdot 1{,}044 = 90{,}031$$

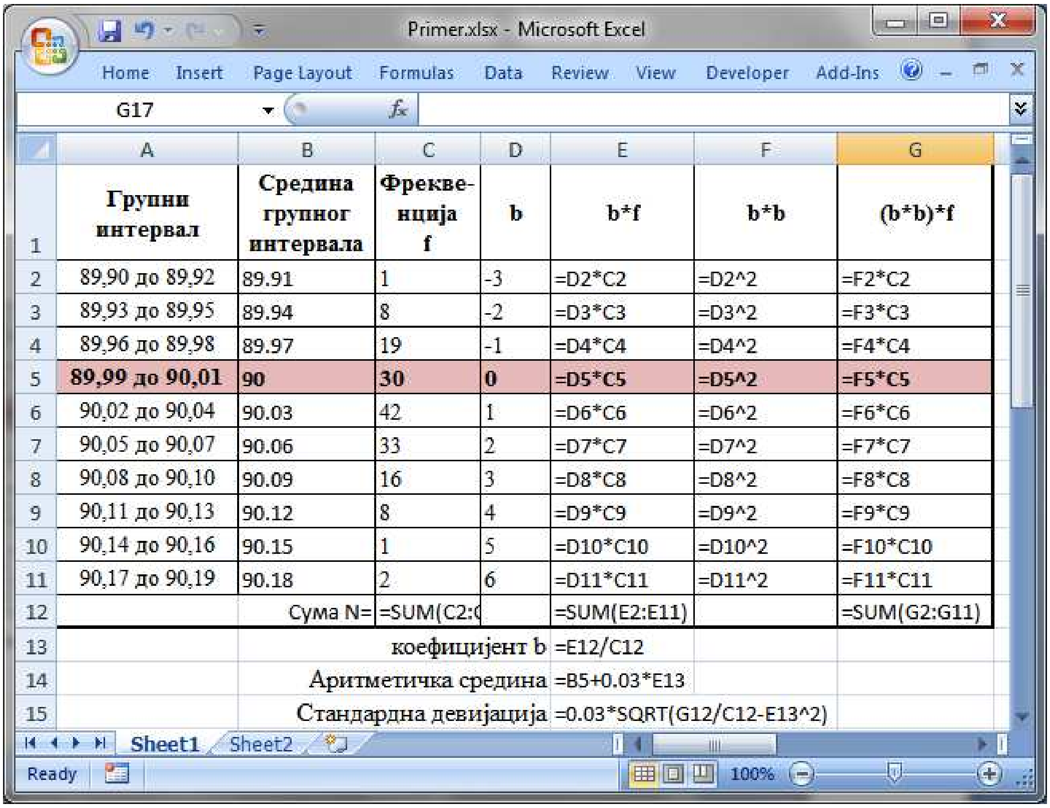
$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot b_i^2}{N} - \bar{b}^2} = \sqrt{\frac{603}{160} - 1{,}044^2} = 1{,}66$$

Стандардна девијација по скраћеном поступку је:

$\sigma_x = d \cdot \sigma_b = 0{,}03 \cdot 1{,}66 = 0{,}0498$, док је по поступку у примеру 1.7 била израчуната вредност $\sigma = 0{,}0483$.

Табела 1.2. Помоћна табела за израчунавање аритметичке средине и стандардне девијације

Групни интервала	Средина групног интервала x_i	Фреквенција f_i	b_i	$b_i f_i$	b_i^2	$b_i^2 f_i$
89,90 do 89,92	89,91	1	-3	-3	9	9
89,93 do 89,95	89,94	8	-2	-16	4	32
89,96 do 89,98	89,97	19	-1	-19	1	19
89,99 do 90,01	**90,00**	**30**	**0**	**0**	**0**	**0**
90,02 do 90,04	90,03	42	1	42	1	42
90,05 do 90,07	90,06	33	2	66	4	132
90,08 do 90,10	90,09	16	3	48	9	144
90,11 do 90,13	90,12	8	4	32	16	128
90,14 do 90,16	90,15	1	5	5	25	25
90,17 do 90,19	90,18	2	6	12	36	72
	Сума	N = 160		167		603



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Групни интервал**	**Средина групног интервала**	**Фрекве-нција f**	**b**	**b*f**	**b*b**	**(b*b)*f**
2	89,90 до 89,92	89.91	1	-3	=D2*C2	=D2^2	=F2*C2
3	89,93 до 89,95	89.94	8	-2	=D3*C3	=D3^2	=F3*C3
4	89,96 до 89,98	89.97	19	-1	=D4*C4	=D4^2	=F4*C4
5	**89,99 до 90,01**	**90**	**30**	**0**	**=D5*C5**	**=D5^2**	**=F5*C5**
6	90,02 до 90,04	90.03	42	1	=D6*C6	=D6^2	=F6*C6
7	90,05 до 90,07	90.06	33	2	=D7*C7	=D7^2	=F7*C7
8	90,08 до 90,10	90.09	16	3	=D8*C8	=D8^2	=F8*C8
9	90,11 до 90,13	90.12	8	4	=D9*C9	=D9^2	=F9*C9
10	90,14 до 90,16	90.15	1	5	=D10*C10	=D10^2	=F10*C10
11	90,17 до 90,19	90.18	2	6	=D11*C11	=D11^2	=F11*C11
12		Сума N=	=SUM(C2:(		=SUM(E2:E11)		=SUM(G2:G11)
13		коефицијент b			=E12/C12		
14		Аритметичка средина			=B5+0.03*E13		
15		Стандардна девијација			=0.03*SQRT(G12/C12-E13^2)		

Слика 1.5. У Excel-u урађен пример из табеле 1.2.

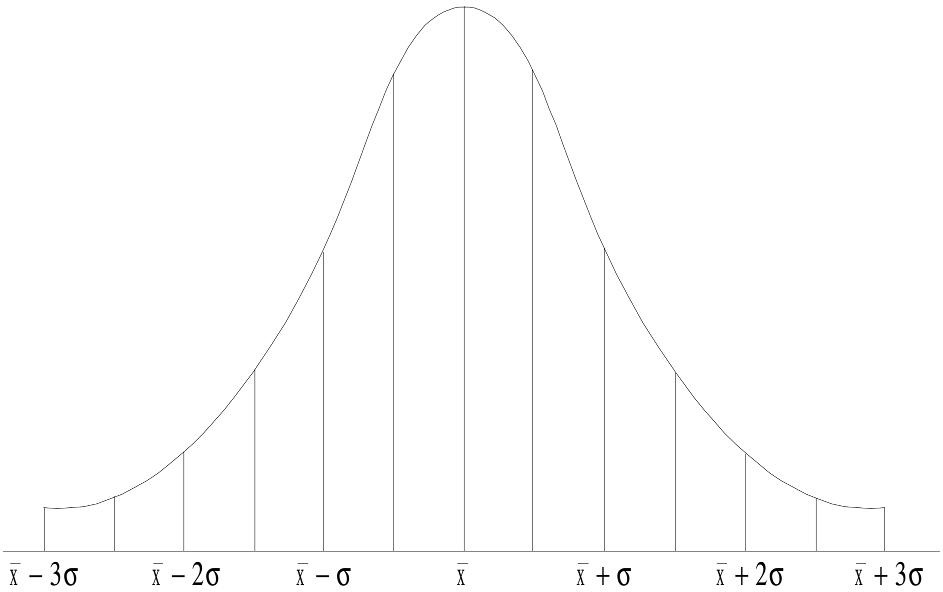
1.6. НОРМАЛНИ РАСПОРЕД

У статистици се за доношење закључака користе теоријски распореди чије су карактеристике свестрано проучене. За праксу статистичке контроле квалитета један од најважнијих је нормални распоред, који зависи једино од вредности, $\bar{x}$ и σ и представља континуирану криву звонастог облика чији крајеви иду бесконачно у оба правца (слика 1.6).

Крива је алгебарска функција:

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.11.)$$

где је x апсциса, y ордината (табела 1.1.), $\bar{x}$ аритметичка средина, σ - стандардна девијација, π - геометријска константа (3,1416), e - база природних логаритама (2,71828). Нормални распоред је потпуно одређен кад су познати његова аритметичка средина $\bar{x}$ и стандардна девијација σ , што значи да се може израчунати фреквенција за сваку вредност x.



Слика 1.6. Крива нормалног распореда

Excel =NORMDIST(42,40,1.5, FALSE)
Синтакса је:
NORMDIST(x; аритметичка средина; стандардна девијација; кумулативно)
и даје вредност нормалне расподеле за вредност: x и параметре: $\bar{x}$ и σ .

С обзиром да је фреквенција за интервал између две вредности x_1 и x_2 представљена површином испод криве, омеђеном ординатама y_1 и y_2, из облика нормалне криве произилази њено важно својство да се у размаку између $\bar{x} - 3\sigma$ и $\bar{x} + 3\sigma$ налази 99,73% свих вредности за x (слика 1.6, табела 1.3. и табела 1.4). У случају нормалног распореда, дакле, практично све измерене вредности за x одступају од аритметичке средине за мање од троструке стандардне девијације.

Excel За вредности из примера изнад:
$\bar{x} - 3\sigma = 40 - 3*1.5 = 35.5$
$\bar{x} + 3\sigma = 40 + 3*1.5 = 44.5$
=NORMDIST(44.5,40,1.5,TRUE) - NORMDIST(35.5,40,1.5,TRUE)

Табела 1.3. Ординате јединичне нормалне расподеле $y = \varphi(t)$ (Ђуричић Р.,М., 1995)

Vrednosti funkcije $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34249	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	14923	24681	24439
1,0	0,24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08058
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	0,05399	05292	05186	05082	04980	04379	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00985	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	0,00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00038	00037	00035	00034	00033	00032	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

Табела 1.4. Релативне фреквенције нормалног распореда за групне интервале од - до

Групни интервали		Релативна фреквенција
од - ∞	до $\overline{x}$ - 3σ	0,0013
од $\overline{x}$ - 3σ	до $\overline{x}$ - 2,5σ	0,0049
од $\overline{x}$ - 2,5σ	до $\overline{x}$ - 2σ	0,0166
од $\overline{x}$ - 2σ	до $\overline{x}$ - 1,5σ	0,0440
од $\overline{x}$ - 1,5 σ	до $\overline{x}$ - σ	0,0919
од $\overline{x}$ - σ	до $\overline{x}$ - 0,5 σ	0,1498
од $\overline{x}$ - 0,5σ	до $\overline{x}$σ	0,1915
од $\overline{x}$σ	до $\overline{x}$ + 0,5σ	0,1915
од $\overline{x}$ + 0,5σ	до $\overline{x}$ + σ	0,1498
од $\overline{x}$ + σ	до $\overline{x}$ + 1,5σ	0,0919
од $\overline{x}$ + 1,5σ	до $\overline{x}$ + 2σ	0,0440
од $\overline{x}$ + 2σ	до $\overline{x}$ + 2,5σ	0,0166
од $\overline{x}$ + 2,5σ	до $\overline{x}$ + 3σ	0,0049
од $\overline{x}$ + 3σ	до + ∞	0,0013

1.7. УЗОРЦИ И СЛУЧАЈНИ УЗОРЦИ

Ако се из скупа од већег броја примерака истог производа на одређени начин изабере n примерака, за тих n примерака се каже да представљају узорак величине n.

Према усвојеној терминологији у нашим стандардима, сваки изабрани примерак је узорак.

Ако је избор извршен без икакве пристрасности, на случајан начин, тако да је сваки примерак у скупу имао исту вероватноћу да буде изабран у узорак, узорак се назива ***случајним***.

1.8. РАСПОРЕД АРИТМЕТИЧКИХ СРЕДИНА УЗОРАКА

За известан скуп примерака истог производа измерене су вредности извесне карактеристике на сваком примерку и начињен је распоред фреквенција добијених вредности. Нека је аритметичка средина тог распореда $\overline{x}$, а стандардна девијација σ. Ако би се из тог скупа изабрао велики број случајних узорака, сваки исте величине *n*, и утврдила просечна вредност посматране карактеристике у сваком узорку (после чега би се сваки узорак поново враћао у скуп), добио би се један нов скуп просечних вредности узорака. Тај скуп просечних вредности може се приказати у облику једног новог распореда фреквенција, који показују колико је узорака имало аритметичку средину која пада у одређени групни интервал. Теоријски је утврђено и експериментално проверено да је овај нови распоред фреквенција у одређеној вези са првобитним распоредом на следећи начин:

а) аритметичка средина новог распореда је истоветна са аритметичком средином првобитног распореда са $\bar{x}$,

б) стандардна девијација новог распореда приближно је једнака $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, дакле, приближно је $\sqrt{n}$ пута мања од стандардне девијације првобитног распореда,

ц) без обзира на то каквог је облика првобитни распоред, распоред аритметичких средина је приближно нормалан; подударање са нормалним распоредом утолико је изразитије, уколико је првобитни распоред више симетричан и уколико је величина н узорака, из којих су рачунате просечне вредности, већа.

Excel - б) = STDEVP(бroj1,број2,...)/SQRT(n)

Пример 1.8. Ако би се бирао велики број случајних узорака величине n = 4 из скупа од 160 вратила чији је распоред фреквенција величине пречника тих узорака дат у табели 1.1, тада би распоред средњих пречника тих узорака био приближно нормалан распоред са аритметичком средином 90,03 и стандардном девијацијом $0{,}0483\sqrt{n}$. Стога би, на пример, 99.73% тих узорака имало просечну величину пречника између 90,03 - 3 x 0,0241 = 89,96 и 90,03 + 3 x 0,0241 = 90,10 мм.

1.9. РАСПОРЕД ПРОЦЕНАТА ДЕФЕКТНИХ ПРИМЕРАКА У УЗОРЦИМА

У извесном скупу примерака истога производа има p процента дефектних примерака. Ако се из тог скупа бирају случајни узорци величине n и за сваки узорак одреди проценат дефектних примерака у њему (после чега се тај узорак поново враћа у основни скуп) добиће се један скуп констатованих процената. Тај скуп може се приказати у облику једног новог распореда фреквенција који би показивао код колико је узорака проценат дефектних примерака падао у одређени групни интервал. Теоријски је утврђено и експериментално проверено да, ако би се начинио тај распоред фреквенција уочених процената, тада би:

а) аритметичка средина тог распореда била једнака p проценту дефектних примерака у основном скупу;

б) стандардна девијација тог распореда била би приближно једнака :

ц) тај распоред био приближно нормалан распоред; подударање са нормалним распоредом било би утолико јаче уколико је п ближе 50% и уколико је н веће.

Пример 1.9. Ако је проценат дефектних примерака у основном скупу 10, и ако су бирани случајни узорци величине 25, распоред процената дефектних примерака у узорцима имаће за аритметичку средину 10, а за стандардну девијацију $\sqrt{\frac{10\cdot 90}{25}}=\sqrt{36}=6$, па ће приближно 99,73% свих узорака имати проценат дефектних између 10 - 3 x 6 = -8, и 10 + 3 x 6 = 28, дакле између 0% и 28%. Према томе, 99,73% случајних узорака величине 25 неће садржати више од 25 x 28/100 = 7 дефектних примерака.

Excel = SQRT(10*90/25)

1.10. ОЦЕНА ТАЧНОСТИ АРИТМЕТИЧКЕ СРЕДИНЕ

Аритметичка средина $\overline{X}$ основног скупа оцењује се у статистици на основу аритметичке средине узорка $\overline{x}$. При томе могу настати два случаја и то:

1. Ако је број елемената у узорку n < 30 тада се статистичка вероватноћа покорава Студентовом распореду па једначина статистичке поузданости има облик:

$$P\left(\overline{x}-t_P\frac{s}{\sqrt{n}}<\overline{X}<\overline{x}+t_P\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=2S\left(t_P,k\right) \qquad (1.12.)$$

или

$$\overline{X}=\overline{x}\pm t_P\frac{s}{\sqrt{n}}=\overline{x}\pm\ \varepsilon \qquad (1.13.)$$

Вредности S (t_p,к) за разне вредности t_p и број степени слободе к = n - 1 дате су у табели 1.7.

2. Ако је број елемената n > 30 тада Студентов распоред тежи нормалном (Гаусовом) распореду и једначина статистичке поузданости има облик:

$$P\left(\overline{x}-t\frac{s}{\sqrt{n}}<\overline{X}<\overline{x}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=2\varnothing(t) \qquad (1.14.)$$

или

$$\overline{X}=\overline{x}\pm\varepsilon \qquad (1.15.)$$

Вредност Лапласове фукције Ø (t) дата је у табели 1.5, а вредности 2 Ø (t) дате су у табели 1.6.

Задатак 1.1.

При пријемној контроли алатног челика измерена му је тврдоћа T/HRC/ :
51, 53, 52, 54, 57, 56, 58, 59, 53 и 57 HRC.

Потребно је одредити:

a) Просечну тврдоћу примљеног алатног челика $\overline{T}$ и вероватноћу да се ова тврдоћа нађе у интервалу поверења ε =+ 3,52 HRC.

b) Интервал поверења у којем ће се са вероватноћом од 98% налазити просечна тврдоћа материјала.

Р е ш е њ е:

a) Параметри узорка се израчунавају из полазних података и то:
- аритметичка средина $\overline{T}$:

$$\overline{T}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{1}{10}\left(51+53+......+53+57\right)=55\,HRC$$

Excel =AVERAGE(51, 53, 52, 54, 57, 56, 58, 59, 53, 57)

Табела 1.5. Вредност Лапласове фукције Ф(t) (Ђуричић, Р.,М., 1995.)

Vrednosti Laplasove funkcije $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11062	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14053	14431	14803	15173
0,4	15554	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0.34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42932	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45440
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	0.47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48222	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48940	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49574	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
.2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	47780	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	498 36	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	499999713									

Табела 1.6. Двострука вредност Лапласове фукције (Ђуричић, Р.,М., 1995.)

Vrednosti funkcije $2\phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10343	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0.2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0.3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0.4	31084	31919	32551	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0.5	38292	38995	39694	40389	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0.6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0.7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0.9	63188	63719	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1.0	0,68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	83547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86637
1,5	86639	86896	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92653
1,8	92814	92970	93124	93375	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	0.95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2.1	96427	96524	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	97798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98495	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99264	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99405	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	0,99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3.9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993
4.	99994	99996	99997	99998	99999	99999	-	-	-	-

*Табела 1.7. Двострука вредност фукције Студентове расподеле **2S(tp,k)***
(Ђуричић, Р.,М., 1995.)

Vrednosti t_p za verovatnoću $P(-t_p < t < t_p) = 2S(t_p, k)$					
$2S(t_p, k)$ / k	0.9	0.95	0.98	0.99	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,20
2	2.92	4.30	6.97	9.93	31,60
3	2.35	3.18	4,54	5.84	12.94
4	2.13	2.78	3.75	4.60	8,61
5	2.02	2.57	3,37	4.03	6,86
6	1.94	2,45	3,14	3,70	5,96
7	1.90	2.37	3,00	3,50	5,40
8	1,86	2.30	2,90	3.36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3.17	4,59
11	1.80	2,20	2,72	3.11	4,49
12	1.79	2.18	2.68	3,06	4,32
13	1,77	2.16	2,65	3.01	4,22
14	1.76	2.14	2,62	2,98	4,14
15	1.75	2,13	2,60	2.95	4.07
16	1.75	2.12	2,58	2.92	4,02
17	1,74	2.11	2,57	2,90	3,97
18	1.73	2.10	2,55	2,88	3,92
19	1.73	2.09	2.54	2,86	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2,85	3,85
21	1.72	2.08	2,52	2,83	3,82
22	1.72	2.07	2,51	2,82	2,79
23	1.71	2.07	2.50	2,81	3,77
24	1.71	2.06	2,49	2,80	3,75
25	1.71	2.06	2,49	2.79	3,72
26	1.71	2.06	2,48	2.78	3,71
27	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3,67
29	1.70	2.05	2.46	2,76	3,66
30	1.70	2.04	2,46	2.75	3,65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3,55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.46
120	1.66	1,98	2.36	2.62	3,37
∞	1,64	1,96	2.33	2,58	3,29

- стандардна девијација σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(T_i - \overline{T}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{10}\left[(51-55)^2 + (53-55)^2 + \ldots\ldots + (57-55)^2\right]} = 2{,}61\,HRC$$

Excel =STDEVP(51, 53, 52, 54, 57, 56, 58, 59, 53, 57)
нпр: вредност ове функције је додељена ћелији A1

С обзиром да је n = 10 < 30 то ће се непозната аритметичка средина $\overline{X}$ основног скупа са вероватноћом 2S(t_p,к) налазити у интервалу поверења:

$$x - t_P\frac{s}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \overline{x} + t_P\frac{s}{\sqrt{n}}$$

или

$$\overline{X} = \overline{x} \pm \varepsilon = \overline{x} \pm t_P\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Из релације: $\varepsilon = t_P \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}52$ следи да је:

$$t_P = 3{,}52 \frac{\sqrt{n}}{s} = 3{,}52 \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}} = 3{,}52 \frac{\sqrt{n-1}}{\sigma} = 3{,}52 \frac{\sqrt{10-1}}{2{,}61} = 4{,}05$$

Из табеле 1.7. за t_p=4,05 и број степени слободе SS = к = n - 1 = 10 - 1 = 9, добија се вероватноћа 2S(4,05; 9) = 0,9947, ра се са вероватноћом од 99,47% може сигурно тврдити да просечна тврдоћа основног скупа налазити у интервалу поверења:

$51{,}48 \text{ HRC} < \overline{T} < 58{,}52 \text{ HRC}$

тј. да је њена вредност:

$\overline{T} \pm \varepsilon = 55 \pm 3{,}52$ HRC.

Excel из табеле 1.7: 2S(3,25; 9) = 0,99 2S(4,78; 9) = 0,999
=0.99+(4.05-3.25)/(4.78-3.25)*(0.999-0.99)

Excel =1-TDIST(4.05,9,2)
Синтакса: TDIST(tp , к, 2) – даје вредност 2S(tp,к)

b) Стандардна девијација основног скупа се израчунава (процењује) на основу узорка по обрасцу:

$$s = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}} = 2{,}61\sqrt{\frac{10-1}{10}} = 2{,}48$$

Excel =A1*SQRT((10-1)/10)

Из табеле 1.7. за $2S(t_p,k) = 0{,}98$ и број степени слободе SS = к = n - 1 =10 - 1 = 9 налази се вредност параметра $t_p = 2{,}82$.

Excel =TINV(1-0.98,9)
Синтакса: TINV (вероватноћа , к) – даје вредност параметра t_p

Границе интервала поверења вредности аритметичке средине основног скупа биће:

$$g_1 = \overline{T} - t_P \frac{s}{\sqrt{n}} = 55 - 2{,}82 \frac{2{,}48}{\sqrt{10}} = 52{,}79\, HRC,$$

$$g_2 = \overline{T} + t_P \frac{s}{\sqrt{n}} = 55 + 2{,}82 \frac{2{,}48}{\sqrt{10}} = 57{,}21\, HRC$$

то јест:

$\overline{T} \pm \varepsilon = 55 \pm 2{,}21$ HRC уз вероватноћу од 98%.

1.11. ОЦЕНА ТАЧНОСТИ СТАНДАРДНЕ ДЕВИЈАЦИЈЕ ОСНОВНОГ СКУПА

Оцена тачности стандардне девијације основног скупа може се извршити на два начина и то:

А) На основу израчунатих ($\bar{x}$,σ) и датих (n) карактеристика узорка, а у том случају вредност стандардне девијације ће се налазити у границама интервала поверења s ± ε, тј. биће:

$$\sigma_o = \sigma \pm \varepsilon \qquad (1.16.)$$

при чему је:

*Табела 1.8. Вредност вероватноће **L(q$_s$, k)** (Ђуричић, Р.,М., 1995.)*

Vrednosti verovatnoće L(q. k) = P(s − ε < σ < s + ε)															
q = ε/s k	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	2,00	2,50	3,00
6	0,264	0,501	0,681	0,791	0,849	0,886	0,913	0,933	0,948	0,959	0,978	0,987	0,995	0,998	0,999
8	305	567	748	845	895	926	948	963	974	981	991	996	999	1,000	1,000
10	340	620	797	882	925	961	968	979	986	991	997	999	1,000	–	–
12	371	664	833	900	946	968	980	988	993	996	999	1,000	–	–	–
14	399	701	862	929	960	978	988	993	996	998	999	–	–	–	–
16	425	733	885	944	971	985	992	996	998	999	1,000	–	–	–	–
18	448	760	903	955	980	990	996	998	999	999	–	–	–	–	–
20	470	784	918	964	984	993	997	999	999	1,000	–	–	–	–	–
25	518	832	944	979	992	997	999	1,000	1,000	–	–	–	–	–	–
30	559	367	962	988	996	999	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–
35	597	893	969	990	997	999	–	–	–	–	–	–	–	–	–
40	628	913	978	994	999	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–
45	657	929	984	996	999	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
50	682	942	993	998	999	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
60	726	960	996	999	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
70	762	972	998	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
80	792	980	999	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
90	818	986	999	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
100	840	990	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
150	914	998	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
200	951	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
250	972	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
500	998	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1000	1,000	1,000	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

$$P\left(s-\varepsilon<\sigma_0<s+\varepsilon\right)=P_L \qquad (1.17.)$$

Вредност P_L се израчунава помоћу χ^2 - распореда јер се по овом теоријском моделу распоређује величина:

$$x^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{ks^2}{\sigma_0^2} \qquad (1.18.)$$

Ово је под условом да се основни скуп покорава нормалном распореду. Однос $q_s=\varepsilon/s$ служи у статистици да се табеларно прикаже величина L(q_c,к) (табела 1.8), па оцена стандардне девијације добија облик :

$$P\left(s-\varepsilon<\sigma_0<s+\varepsilon\right)=P_L \qquad (1.19.)$$

б) На основу распона P_1, P_2, P_3, ..., $P_к$, када су у питању мали узорци, и тада се оцена параметра σ_0 врши преко приближне једначине:

$$\sigma_0 = \overline{R} / d_2 \qquad (1.20.)$$

Интервал поверења биће:

$$\frac{\overline{R}}{d_2} \frac{1}{1 + tb/\sqrt{k}} < \sigma_0 < \frac{\overline{R}}{d_2} \frac{1}{1 - tb/\sqrt{k}} \qquad (1.21.)$$

Вредност параметра t одређује се из табеле 1.6, у зависности од жељене поузданости 2Ø(t) да ће се оцењена вредност σ_0 налазити у овом интервалу.

Задатак 1.2.

При атестирању мерног система извршено је 21 мерење истим мерним системом. Систематске грешке су искључене. Резултати мерења су послужили да се израчуна процена стандардне девијације основног скупа (случајних грешака мерења) s=0,8. Потребно је одредити тачност датог мерног система са поузданошћу $P_L = L(q_s, k) = 0,999$.

Р е ш е њ е:

Решавање задатка се своди на утврђивање интервала поверења за стандардну девијацију случајних грешака мерења:

$$s - sq_s < \sigma_0 < s + sq_s$$

уз поузданост од 99,9%.

За $L(q_s, k) = 0,999$ и број степени слободе SS = k = n-1 = 21-1 = 20 из табеле 1.8. се добија да је $q_s = 0,80$.

Тражена тачност мерног система износи:

$$0,8 - 0,8 \times 0,8 < \sigma < 0,8 + 0,8 \times 0,8, \text{ или}$$
$$0,16 < \sigma < 1,44$$

уз поузданост од 99,9%.

Задатак 1.3.

При брушењу пречника осовине $22^{-0.05}$ mm, извучено је по плану контроле к=15 узастопних узорака из производне серије. Сваки узорак је садржао по 10 радних предмета и за сваки узорак израчунате су вредности распона расипања $R = x_{max} - x_{min} = d_{max} - d_{min}$ (табела 1.9.).

Табела 1.9. Израчунате вредности за R у задатку 1.3.

Редни број узорка	1	2	3	4	5	6	7	8
$R\,/\,\mu m/$	8	18	7	21	16	10	16	12

Редни број узорка	9	10	11	12	13	14	15
$R\,/\,\mu m/$	9	28	19	13	22	16	24

Потребно је на основу резултата узорака одредити стандардну девијацију σ_o основног скупа и границе интервала поверења у којем се са поузданошћу од 0,99 налази оцењена вредност параметра σ_o.

Р е ш е њ е:

На основу родатака (табела 1.9.) аритметичка средина распона расипања износи:

$$\overline{R} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} R_i = \frac{1}{15}(8+18+.....+16+24) = 16\,\mu m = 0{,}016\,mm$$

Из табеле 1.10. за n=10 налазе се вредности и то: d_2 = 3,078 и b = 0,259. Оцена стандардне девијације основног скупа биће:

$$\sigma_0 = \frac{R}{d_2} = \frac{0{,}016}{3{,}078} = 0{,}0052\,mm$$

*Табела 1.10. Величине **d₂**, **a** и **b** за оцену тачности стандардне девијацијхе основног скупа на основу распона (Ђуричић, Р.,М., 1995.)*

Обим узорка n	Вредност величина			Обим узорка n	Вредност величина		
	d_2	**a**	**b**		**d_2**	**a**	**b**
2	1,128	0,853	0,756	12	3,258	0,778	0,239
3	1,693	0,888	0,525	13	3,336	0,775	0,231
4	2,059	0,880	0,427	14	3,407	0,762	0,224
5	2,326	0,864	0,371	15	3,472	0,755	0,217
6	2,634	0,848	0,334	16	3,532	0,749	0,212
7	2,704	0,833	0,308	17	3,588	0,743	0,207
8	2,847	0,826	0,288	18	3,640	0,738	0,203
9	2,970	0,808	0,272	19	3,689	0,733	0,199
10	3,078	0,797	0,259	20	3,735	0,729	0,195
11	3,173	0,787	0,248				

Интервал поверења за вредност σ_o одређује се помоћу једначине:

$$\frac{\overline{R}}{d_2}\,\frac{1}{1+tb/\sqrt{k}} < \sigma_0 < \frac{\overline{R}}{d_2}\,\frac{1}{1-tb/\sqrt{k}}$$

или:

$$\frac{0{,}016}{3{,}078}\frac{1}{1+2{,}575\cdot 0{,}259\sqrt{15}} < \sigma_0 < \frac{0{,}016}{3{,}0781-2{,}575\cdot 0{,}259\sqrt{15}}$$

Вредност t =2,575 добијена је из табеле 1.6. за задату вероватноћу 2Φ(t) = 0,99. Вредност σ_o после израчунавања, сигурно се налази у интервалу:

$$0{,}0044 \text{ mm} < \sigma_o < 0{,}0063 \text{ mm}$$

са вероватноћом 99%.

Excel =0.016/(3.078*(1+2.575*0.259*SQRT(15)))

1.12. ОЦЕНА ПРОПОРЦИЈЕ ОСНОВНОГ ДВОСЛОЈНОГ СКУПА

У производној пракси често је потребно оценити % лоших производа у производној серији. То се у статистичкој контроли атрибутивних карактеристика квалитета поистовећује са оценом пропорције основног скупа.

Основни скуп, код кога један његов број елемената поседује неко својство, а преостали део не, назива се двослојни и код њега је:

$$p = m/n;\ q = (n - m)/n = 1 - p \qquad (1.22.)$$

где је: n - број елемената извученог узорка, m - број елемената у узорку са нађеним својством, а (n - m) - број елемената у узорку без тог својства.

Стандардна девијација σ_p процењује се са:

$$\sigma_p \cong s_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} \qquad (1.23.)$$

Оцена пропорције P основног скупа на основу извученог узорка од n елемената уз вероватноћу од 2Ø(t) биће:

$$p - t \times s_p < P < p + t \times s_p \qquad (1.24.)$$

или

$$P = p \pm \varepsilon = p \pm t \times s_p \qquad (1.25.)$$

Задатак 1.4.

При контроли пречника наврткe из велике производне серије контролним навојним чепом утврђено је да у узорку од n = 250 обрађених навртки њих 12 = m не задовољава прописану толеранцију. Потребно је оценити пропорцију лоших комада у производној серији уважавајући податке из извученоg узорка. поузданост при томе треба да буде 2Φ(t) = 0,98.

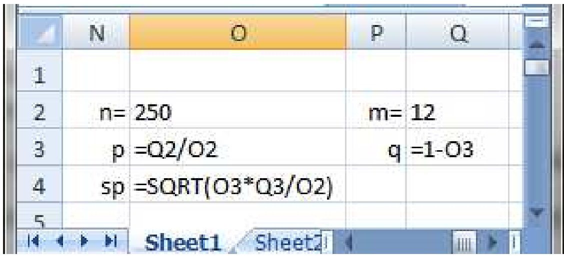
Р е ш е њ е:

Полазни подаци су: n = 250; m = 12; n - m = 238.
Пропорција p и q у узорку биће:

$$p = m/n = 12/250 = 0{,}048; \; q = 1 - p = 1 - 0{,}048 = 0{,}952.$$

Процена стандардне девијације врши се по обрасцу:

$$s_p = \sqrt{pq/n} = \sqrt{0{,}048 \times 0{,}952/250} = 0{,}0135$$



	N	O	P	Q
1				
2	n=	250	m=	12
3	p	=Q2/O2	q	=1-O3
4	sp	=SQRT(O3*Q3/O2)		
5				

Слика 1.7. У Excel-и урађен задатак 1.4.

Из табеле 1.6. вероватноћи 2Ф(t)=0,98 одговара вредност параметра t=2,33. Осена пропорције основног скупа биће:

$$p - t \times s_p \; < \; P < \; p + t \times s_p$$

$$0{,}048 - 2{,}33 \times 0{,}0135 \; < \; P \; < \; 0{,}048 + 2{,}33 \times 0{,}0135$$

$$0{,}0165 \; < \; P \; < \; 0{,}0795, \text{ или}$$

$$1{,}65\% \; < \; P \; < \; 7{,}95\%$$

Значи производна серија садржи између 1,65% и 7,95% лоше обрађених навртки уз вероватноћу од 98%.

1.13. ОЦЕНА НОРМАЛНОСТИ РАСПОРЕДА ЕМПИРИЈСКОГ СКУПА

У пракси статистичке контроле поред λ-теста и χ^2-теста (види поглавље Статистичко тестирање хипотеза) за оцену нормалности распореда емпиријског скупа користе се и:

А) критеријум $\alpha = 0$ и $\beta = 3$, и

Б) помоћу криве функције распореда, односно Хенријеве праве.

А) У математичкој статистици се преко коефицијента асиметрије (α=0) и коефицијента спљоштености (β=3) може закључити да се емпиријски скуп покорава закону нормалне расподеле.

Једначине коефицијената асиметрије (α) и спљоштености (β) ампиријског скупа гласе:

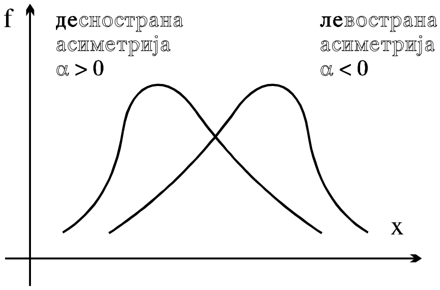
$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \quad \beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad (1.26.)$$

где су: μ_3 и μ_4 - централни моменти трећег и четвртог реда. Они су одређени релацијама:

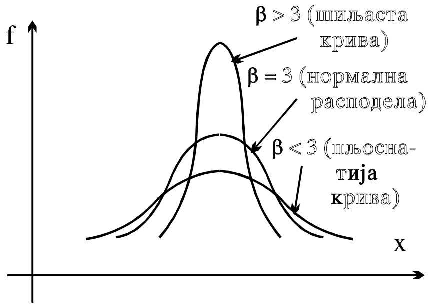
$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum \left(x_i - \bar{x} \right)^3 f_i \qquad (1.27.)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum \left(x_i - \bar{x} \right)^4 f_i \qquad (1.28.)$$

Коефицијент асиметрије α служи за уочавање груписаности јединица око аритметичке средине (слика 1.8), а коефицијент спљоштености β служи за приказ хомогености посматрања ($\beta > 3$ - шиљастија крива тј. хомогенија појава, односно $\beta < 3$ пљоснатија крива и хетерогенија појава тј. веће расипање случајне величине; слика 1.9).

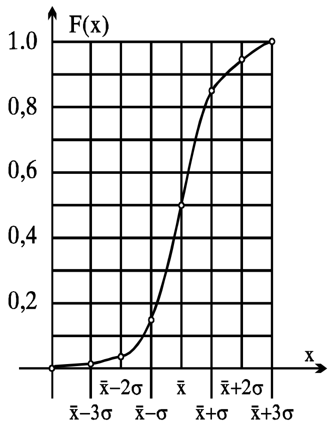


Слика 1.8. Графички приказ основних облика расподеле фреквенције с обзиром на асиметрију

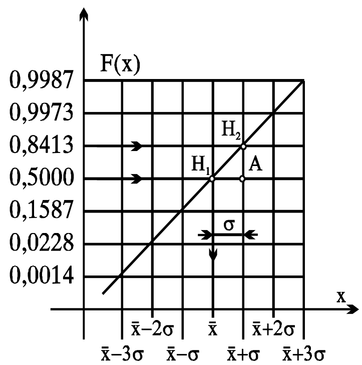


Слика 1.9. Графички приказ основних облика расподеле фреквенције с обзиром на спљоштеност

Б) Крива функције распореда (слика 1.10) може се пресликати у праву линију, која се зове Хенријева права (слика 1.11).



Слика 1.10. Крива функције распореда



Слика 1.11 Хенријева права

Код Хенријеве праве на апсцису се наносе једнаке јединице, а на ординати неједнаке величине. Већим расипањима вредности карактеристике квалитета одговара стрмија Хенријева права и обрнуто. За Гаусов нормални распоред Хенријева права се конструише повлачењем рецимо кроз тачке $H_1(\bar{x};0{,}5)$ и $H_2(\bar{x}+\sigma;0{,}8413)$. Ордината $F(\bar{x}+\sigma)=0{,}8413$ добија се из табеле 1.5. После уцртавања Хенријеве праве у координатни систем се уносе вредности кумулативне вероватноће емпиријског скупа на горње границе групних интервала. Ако се унете тачке распоређују непосредно око Хенријеве праве емпиријски скуп се покорава нормалној расподели и обрнуто ако емпиријски скуп се не покорава нормалном већ неком другом распореду унете тачке ће следити неку криву линију.

Помоћу уцртане Хенријеве праве може се приближно одредити аритметичка средина $\bar{x}$ повлачењем линије из ординате 0,5. Стандардна девијација се добија повлачењем линије из ординате 0,8413 до Хенријеве праве и одсечак $\overline{H_1A}$ представља $\approx\sigma$.

Задатак 1.5.

На регулисаном стругу обрађују се радни комади називног пречника $\Phi 20^{+0{,}1}$mm. После обраде n = 45 радних комада измерене су вредности пречника (види колону 1 и 2 у табели 1.11). Потребно је:

1. Проверити нормалност датог емпиријског распореда помоћу Хенријеве праве.

2.Проверити нормалност датог емпиријског распореда на основу коефицијената асиметрије α и спљоштености β

3.Утврдити тачност процеса обраде у тренутку обраде узорка и процентуални број евентуално нетачних комада под претпоставком $\bar{X}=\bar{x}$ и $\sigma_0=\sigma$.

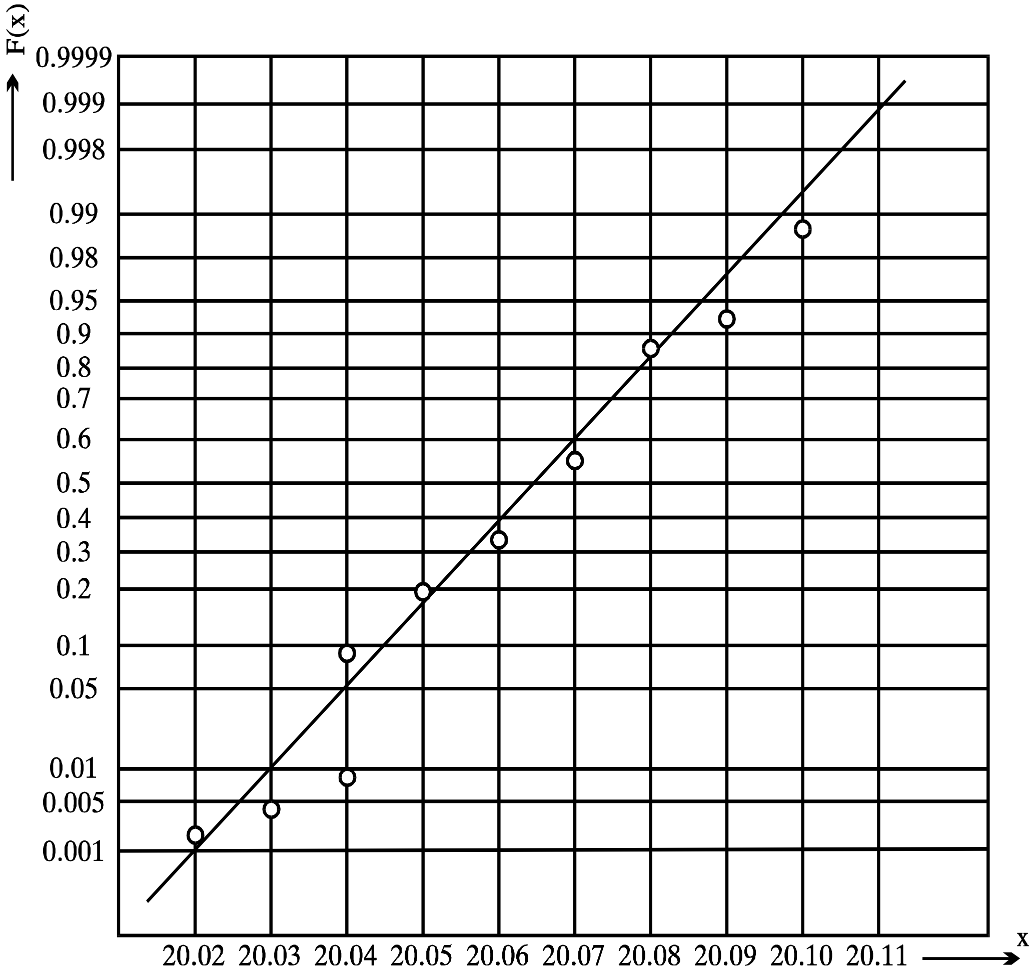
Табела 1.11. Помоћна табела

x_i(mm)	f_i	x_i - a	$(x_i-a)^2$	$(x_i-a)\ f_i$	$(x_i-a)^2\ f_i$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
20.02	1	-0.05	$2.5\ 10^{-3}$	-0.05	$2.5\ 10^{-3}$
20.03	1	-0.04	$1.6\ 10^{-3}$	-0.04	$1.6\ 10^{-3}$
20.04	2	-0.03	$0.9\ 10^{-3}$	-0.06	$1.8\ 10^{-3}$
20.05	4	-0.02	$0.4\ 10^{-3}$	-0.08	$1.6\ 10^{-3}$
20.06	9	-0.01	$0.1\ 10^{-3}$	-0.09	$0.9\ 10^{-3}$
20.07	13	0	0	0	0
20.08	7	0.01	$0.1\ 10^{-3}$	0.07	$0.7\ 10^{-3}$
20.09	4	0.02	$0.4\ 10^{-3}$	0.08	$1.6\ 10^{-3}$
20.10	3	0.03	$0.9\ 10^{-3}$	0.09	$2.7\ 10^{-3}$
20.11	1	0.04	$1.6\ 10^{-3}$	0.04	$1.6\ 10^{-3}$
СУМА:	45			-0.04	0.015

Решење

1. На дијаграму (слика 1.12) нанете су тачке за претходно израчунате кумулативне вероватноће емпиријског распореда у функцији од величине x, а затим повучена Хенријева права. Све тачке се распоређују у њеној непосредној близини што указује да је основни скуп нормалан, тј. да емпиријски скуп следи нормалан Гаусов распоред.

Аритметичка средина и стандардна девијација узорка, коришћењем крајњих резултата из табеле 1.11. израчунавају се на следећи начин:



Слика 1.12. Контрола нормалности (Хенријева права) за емпиријски скуп из табеле 1.12.

Табела 1.12. Помоћна табела

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^3$	$(x_i-\bar{x})^4$	$(x_i-\bar{x})^3 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
1	2	3	4	5	6	
20.02	1	-0.05	$-125\ 10^{-6}$	$625\ 10^{-8}$	$-125\ 10^{-6}$	$625\ 10^{-8}$
20.03	1	-0.04	$-64\ 10^{-6}$	$256\ 10^{-8}$	$-64\ 10^{-6}$	$256\ 10^{-8}$
20.04	2	-0.03	$-27\ 10^{-6}$	$81\ 10^{-8}$	$-54\ 10^{-6}$	$162\ 10^{-8}$
20.05	4	-0.02	$-8\ 10^{-6}$	$16\ 10^{-8}$	$-32\ 10^{-6}$	$62\ 10^{-8}$
20.06	9	-0.01	$-1\ 10^{-6}$	$1\ 10^{-8}$	$-9\ 10^{-6}$	$9\ 10^{-8}$
20.07	13	0	0	0	0	0
20.08	7	0.01	$1\ 10^{-6}$	$1\ 10^{-8}$	$7\ 10^{-6}$	$7\ 10^{-8}$
20.09	4	0.02	$8\ 10^{-6}$	$16\ 10^{-8}$	$32\ 10^{-6}$	$64\ 10^{-8}$
20.10	3	0.03	$27\ 10^{-6}$	$81\ 10^{-8}$	$81\ 10^{-6}$	$244\ 10^{-8}$
20.11	1	0.04	$64\ 10^{-6}$	$256\ 10^{-8}$	$64\ 10^{-6}$	$256\ 10^{-8}$
СУМА:	45				$1\ 10^{-4}$	$14.56\ 10^{-6}$

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum\left(x_i - a\right) f\, i = 20{,}07 + \frac{1}{45}\left(-0{,}04\right) \cong 20{,}07mm$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum\left(x_i - a\right)^2 f\, i - \left(x_i - a\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{45}\cdot 0{,}015 - \left(20{,}07 - 20{,}07\right)^2} =$$

$$= 0{,}0183mm$$

2. Једначине коефицијената асиметрије α и спљоштености β емпиријског скупа гласе:

$$\alpha = \mu_3/\sigma^3 \quad ; \quad \beta = \mu_4/\sigma^4$$

где су μ_3 и μ_4 централни моменти трећег и четвртог реда, дефинисани изразима:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^3 f\, i; \quad \mu_4 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^4 f\, i$$

ради лакшег израчунавања користићемо се помоћном табелом 1.12.

На основу крајњих података из табеле 1.12. добијају се централни моменти трећег и четвртог реда:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^3 f\, i = \frac{1}{45}10^{-4} = 2{,}2\cdot 10^{-6}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^4 f\, i = \frac{1}{45}14{,}56\cdot 10^{-6} = 32{,}36\cdot 10^{-8}$$

а затим и вредности коефицијената асиметрије α и спљоштености β:

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{\left(1{,}83 \cdot 10^{-2}\right)^3} = 0{,}359$$

$$\beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{32{,}36 \cdot 10^{-8}}{\left(1{,}83 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 2{,}89$$

Excel = SKEW(број1,број2, ...) – израчунава асиметричност α
= KURT(број1,број2,...) – израчунава спљоштеност β

из којих се види да је $\alpha \approx 0$ и $\beta \approx 3$. Отуда се закључује (не сасвим поуздано) да нумеричке вредности карактеристике квалитета се покоравају закону нормалног распореда, тако да се емпиријски распоред може даље интерпретирати релацијама нормалног распореда. Значи да је овом провером потврђена тврдња о нормалности изнета на основу конструкције Хенријеве праве у тачки 1. овог примера.

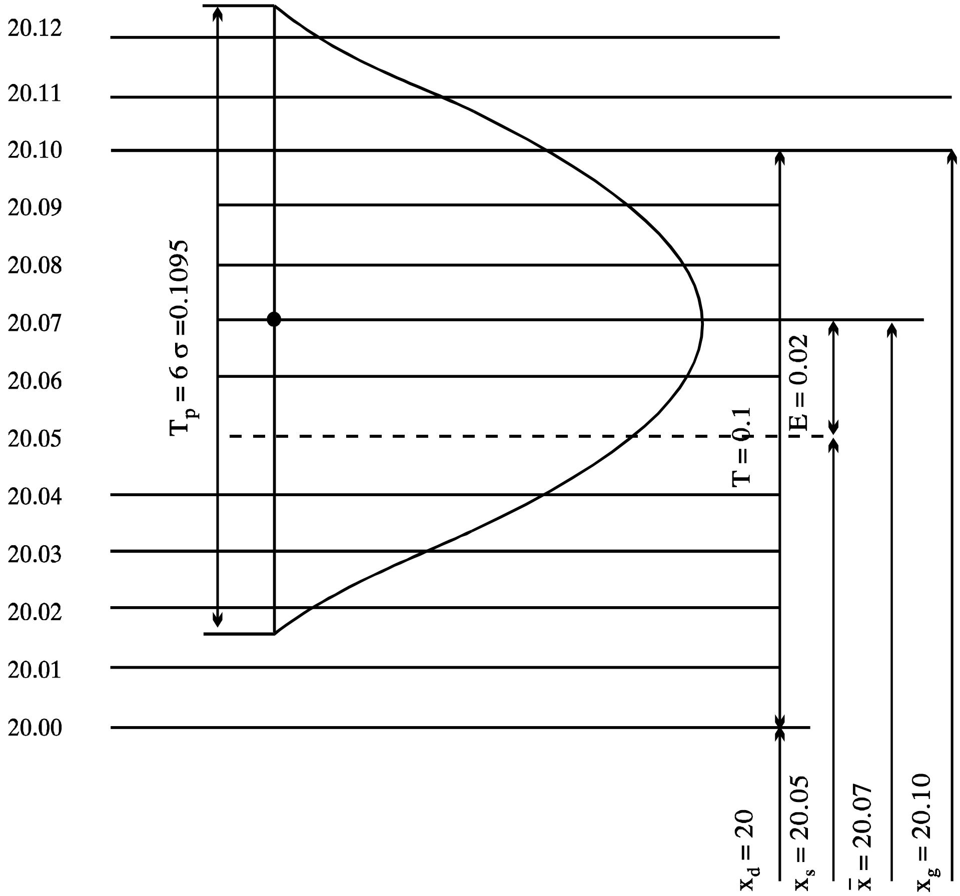
3. Природна толеранција процеса обраде износи:

$$T_p = 6\ \sigma_o = 6\ \sigma = 6 \times 0{,}0183 = 0{,}1095 \text{ mm}$$

док је задата толеранција T = 0,1 mm, па је отуда вредност коефицијента тачности процеса:

$$\mu_1 = T_p \,/\, T = 0{,}1095 \,/\, 0{,}1 = 1{,}095$$

Први услов тачности процеса није задовољен јер је $\mu_1 > 1$.



Слика 1.13. Међусобни однос величина и положаја природне и прописане толеранције

Из слике 1.13. види се да је:

$$x_s = 0,5\ (x_d + x_g) = 0,5\ (20 + 20,1) = 20,05\ \text{mm}$$

одакле произилази допуштена:

$$\mu_{2d} = 0,5\ (1 - \mu_1) = 0,5\ (1 - 1,095) = 0,0475$$

и стварна

$$\mu_2 = \frac{|\bar{x} - x_s|}{T} = \frac{20,07 - 20,05}{0,1} = 0,2$$

вредност коефицијента тачности регулисања: следи да није задовољен други услов тачности $\mu_2 < \mu_3$ пошто је:

$$\mu_2 = 0,2 \; > \; \mu_{2d} = 0,0475.$$

Према томе, процес обраде односних комада није био тачан.

Из слике 1.13. која приказује однос прописаног и природног толеранцијског поља пречника обрађених комада, Види се да су ова поља међусобно померена изван допуштене границе ($\mu_2 < \mu_3$) тако да је процентуални број нетачно обрађених комада (са вероватноћом 99,73%):

$$q = \left[0,5 - \varnothing\left(\frac{0,5T + x_s - \bar{x}}{\sigma} \right) \right] 100 = \left[0,5 - \varnothing\left(\frac{0,5 \cdot 0,1 + 20,05 - 20,07}{0,0183} \right) \right] =$$

$$q = \left[0,5 - \varnothing(1,639442) \right] 100 = (0,5 - 0,4494) \cdot 100 = 5,06\%$$

или 2,277 = 2 комада. Ова два нетачно обрађена комада прелазе (слика 1.13), горњу границу толеранције па се могу дорадити.

2. ТЕСТИРАЊЕ СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА

Под хипотезом се подразумева научна претпоставка заснована на познатим чињеницама ради извођења неког закључка. Поступак проверавања хипотезе је научна метода и назива се ***тестирањем хипотезе.*** Тестирање хипотезе може се вршити било посматрањем свих јединица статистичког скупа било помоћу узорака.

Узорак представља основу метода тестирања статистичких хипотеза, а извлачи се у довољном и ограниченом броју елемената (примерака) и на случајан начин, из основног скупа.

Предмет статистичке хипотезе је неки параметар статистичког скупа. Основа при тестирању је претпоставка о скупу, одговарајући параметар (карактеристика) узорка и његов теоријски распоред. Очекујемо да вредност карактеристика узорка се разликује од односног параметра скупа. Разлике ће бити мање вероватне ако су веће (значајније, сигнификантне) и обрнуто. То је са разлога што је вероватноћа појаве већих одступања мања, а мањих одступања већа. Одлуке о разликама се доносе уз известан унапред прихвћени ***ниво значајности (ризик).***

Тестирањем статистичких хипотеза могуће је решити читав низ производно-технолошких задатака и низ других задатака из области управљања квалитетом производа/услуга. При томе, посебно се издвајају:

- *упоредне оцене карактеристика обрадних система, мерних система, система управљања и друге производне технике,*
- *упоредне оцене технолошких способности различитих производних процеса и метода обраде са становишта тачности, економичности, продуктивности и др., и*
- *изучавање и решавање специјалних задатака из упрвљања квалитетом производа/услуга.*

Статистичко тестирање хипотеза састоји се из више етапа и то:

- *постављање нулте хипотезе и избор теста,*
- *спецификација теоријског распореда фреквенција параметра узорка и одређивање области прихватања, израчунавање параметара узорка и одређивање његовог положаја у теоријском распореду и доношење одлуке о прихватању хипотезе.*

<u>*Постављање тестиране или нулте хипотезе*</u>, X_o има за циљ превођење вербално формулисане истраживане хипотезе у статистичку хипотезу која ће бити тестирана. Рецимо, хипотеза може бити да разлика у квалитету два иста дела израђена на различитим машинама, постоји или да разлике нема, односно да је разлика само случајна.

Статистичка хипотеза се по правилу поставља у облику нулте хипотезе, X_o, тј. да разлике нема, односно да је разлика случајна. За нулту хипотезу распореди су, углавном, познати и таблице сачињене. Ако резултати статистичког скупа дисквалификују нулту хипотезу, X_o, може се поставити хипотеза, X_1, којом се поставља провера да разлика постоји ($H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, или $H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, или $H : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ итд).

Спецификација теоријског распореда фреквенција параметра узорка је друга фаза при тестирању хипотеза и служи као основа за тестирање хипотезе о вредности параметра скупа. У пракси је за велики број параметара идентификован одговарајући распоред и статистички описан. Тако аритметичке средине узорака имају распоред који је нормалан или тежи нормалном за било који распоред основног скупа.

У науци о квалитету као мера за доношење одлуке о истинитости хипотезе користи се ниво значајности α , који зависи од практичних захтева. Најчешће се у пракси ради са нивоом значајности α = 0,05 или нивоом високе значајности α = 0,01. Ако је вероватноћа појаве вредности израчунатог параметра узорка (под условом да је нулта хипотеза истинита) једнака или мања од нивоа значајности одбацује се нулта хипотеза и прихвата као вероватнија алтернативна хипотеза.

2.1. СТАТИСТИЧКИ ЗНАЧАЈНА РАЗЛИКА

Нулта хипотеза је неистинита када је разлика између вредности параметара узорка и хипотетичке вредности параметра основног скупа сувише велика да би се сматрала случајном, тј. када је мала вероватноћа да је случајна. Разлика у том случају је статистички значајна и не може се приписати случајним флуктуацијама, али то не значи и да је практично значајна. Наиме, у пракси се не морају увек предузети мере за смањење разлике ако се тестирањем разлике у квалитету уочи стратистички значајна разлика.

2.2. СПЕЦИФИЧНИ ТЕСТОВИ ХИПОТЕЗА

Тестирање хипотеза у науци о квалитету се врши у вези са специфичним параметрима за популацију. Сиже најважнијих тестова дат је у табели 2.1. На примерима у (Ђуричић, Р., М., 1995) су објашњени специфични тестови хипотеза.

Табела 2.1. Обрасци за тестирање статистичких хипотеза

Р. бр.	***Хипотеза***	**Статистика теста и распореда**
1.	H_0:Провера но - рмалности распореда рецептуром λ - теста	$f_t = \frac{dn}{\sigma}\varphi(t); \lambda = \frac{\max\{\lvert N_e - N_t \rvert\}}{n}\sqrt{n} = D_{\max}\sqrt{n}$ $P(\lambda) \geq 0.03 \div 0.05$ - хипотеза истинита (узорак следи нормални распоред)
2.	H_0 :Провера но- рмалности распореда рецептуром χ^2- теста	$f_t = \frac{dn}{\sigma}\varphi(t);\ x^2 = \sum\frac{(f_e - f_t)^2}{f_t}; SS = k = n - 3$ (n - број групних интервала) $P(x^2) \geq 0.05$ - разлике нису значајне и узорак следи нормални распоред
3.	$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$(арит- метичка средина једног основног скупа је једнака аритметичкој средини другог основног скупа)	$t_1 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_1^2}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = t$ - расподела $SS = k = n_1 + n_2 - 2$ $t_1 < 3$ (разлика аритметичких средина случајна) $t_1 \geq 3$ (разлика аритметичких средина значајна)
4	$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ (стандардна деви- јација основног скупа 1 једнака је стандардној девијацији основ- ног скупа 2; претпоставка је да су оба скупа нормална).	$F_r = \frac{s_1^2}{s_2^2}$; F- расподела са $SS_1 = k_1 = n_1 - 1$; $SS_2 = k_2 = n_2 - 1$ $F_r < F_t$ - разлика између варијанси s_1^2 и s_2^2 је случајна и Х да узорци припадају истом основном скупу је истинита $F_r > F_t$- разлика између варијанси s_1^2 и s_2^2 , а тиме и стандардних девијација σ_1 и σ_2 су значајне.
5.	H_0: $\sigma_1=\sigma_2$(стандар- дна девијација основног скупа 1 једнака је стандардној девијацији скупа 2; узорци су велики, а распоред основног скупа знатно се разликује од нор- малног распореда)	$t_s = \frac{\lvert s_1 - s_2 \rvert}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2}}}$; $t_s < 3$ (разлике између варијација су случајне) $t_1 \geq 3$ (разлике између варијација су значајне)
6.	H_0: Припадност два узорака истом основном скупу	$x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5$=заједнички растући низ елеме-ната првог узорка $x_и$-(и=1,2,3,4,5) и другог узорка $y_и$-(и=1,2,3,4 y=0+1+1+4+4=10 = број инверзија (када било којој вредности x претходи неки y и тада тај пар даје инверзију

		$\bar{u} = E(u) = mn/2$ - аритметичка средина при броју елемената n>10 и m>10 у другом узорку $\sigma_u^2 = D(u) = \frac{m \times n}{12}(m+n+1)$ - варијанса За: 1.$\bar{u} - t_q\sigma_u < u < \bar{u} + t_q\sigma_u$ - хипотеза је истинита q=P(| у- $\bar{у}$| >$т_q$σ)=1-2Φ(т); за q=P=0,05 је t_q=1,96
7.	H_0:Карактер утицаја извесног фактора	Поступак тестирања математички је истоветан поступку изложеном у тачки 3. и 4. ове табеле.
8.	H_0:Случајност узорка преко поступка узастопних разлика $d_1=x_2-x_1$; $d_2=x_3-x_2$; ... $d_{н-1}=x_n-x_{n-1}$	$c^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum d_i^2$ = процена варијансе основног скупа $s^2 = \sigma^2 \times n/(n-1);\ \delta = c^2/s^2\ ;\ \delta < \delta_q$ - хипотеза истинит $\delta_q = 1 - t_q/\sqrt{n+1}\ ;\ \varnothing(t_q) = 0.5 - q/100;\ za\ \ n \le 20 \rightarrow \delta_q$ и Таб.5.12. за нивое значајности q=0.1%, 1% и 5%
9.	H_0:Откривање грубих грешака у елементима емпиријског скупа	а) Параметри основног скупа $\bar{X}$ и σ_0 непознати $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i\ ;\ \sigma = \frac{1}{n}\sqrt{(x_i - \bar{x})^2}\ ;\ u_q = \bar{x} + g_q \times \sigma$ горња допуштена критична граница; q - ниво значајности (табела 5.13/2/) $x_{\max} < u_q = \bar{x} + g_q\sigma$ - хипотеза је истинита $x_{\min} < u_q = \bar{x} - g_q\sigma$ - хипотеза је истинита б) Параметри основног скупа $\bar{X}$ и σ_0 познати $\varnothing(t = t_q) = (1 - \frac{q}{100})^{1/n} - 0.5;\ x_{\max} < u_q = \bar{x} + t_q\sigma_0 - H_0$ истинита t_q - параметар (табела 5.2./2/)
10.	H_0:$\sigma^2_{01} = \sigma^2_{02} =$.........= $\sigma^2_{0к} = \sigma^2_0$ (међусобна једнакост низа варијанси)	$s^2 = \frac{s_1^2(n_i - 1)}{N-k}; c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}(\sum\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k})$ $Q = \frac{2.303}{c}\left[(N-k)\log s^2 - \sum(n_i - 1)\log s_i^2\right] \le x_q^2 - H_0$ истинита У случају да узорци садрже исти број елемената биће: $G_{\max} = \frac{\max s_i^2}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + ...+ s_x^2};\ G_{\max} > G_t \rightarrow H_0$ је неистинит SS= к = n-1 (Таб.5.13./2/)
11.	H_0: $\bar{x} = \bar{X}$ (о аритметичкој средини на основу великог узорка)	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i; s = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}; t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}; n > 30;$ $\alpha = 0.27\% = 0.0027$ - ниво значајности t<2 - аритметичка средина основног скупа једнака је $\bar{x}$ t>3 - разлика између $\bar{x}$ и $\bar{X}$ је значајна 2<t<3 - разлика између $\bar{x}$ и $\bar{X}$ је значајна али не и висок значајна па треба: извући нови узорак па донети закључак

12.	H_0: $\overline{x} = \overline{X}$ (о аритметичкој средини основног скупа на основу малог узорка (n<30) (основни скуп се покорава нормалном распореду)	или не прихватити хипотезу $s = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}}$; $t_1 = \frac{\overline{x}-\overline{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$; $SS = k = n-1$, $P(\lvert t\rvert \geq t_1) < 0.05$ односно $P(\lvert t\rvert \geq t_1) < 0.01 \rightarrow$ разлика између $\overline{x}$ и $\overline{X}$ је значајна и хипотеза X_0 се одбацује $P(\lvert t\rvert > t_1) > 0.05$, тада је разлика између $\overline{x}$ и $\overline{X}$ случајна и прихвата се хипотеза X_0 $P(\overline{x} - t_p \frac{s}{\sqrt{n}}) < \overline{X} < (\overline{x} + t_p \frac{s}{\sqrt{n}}) = 2S(t_p, k) =$ границе поверења $\overline{X} = \overline{x} \pm t_p s / \sqrt{n}$
13.	H_0: $p=P_0$ (о пропорцији P_0 основног скупа на основу великог узорка (n>30))	$p=m/n$; $q=(n-m)/n=1-p$; $\sigma_p=\sqrt{P_0Q_0/n}$; $Q_0=1-P_0$; $t_0=\lvert p-P_0\rvert/\sigma_p$1. $t_0<2$, тада је $\lvert p-P_0\rvert$ случајна и хипотеза X_0 истинита 2. $t_0>3$, тада је $\lvert p-P_0\rvert$ значајна и хипотеза X_0 се одбацује 3. $2<t_0<3$, тада је $\lvert p-P_0\rvert$ значајна, али не и високо значајна па је треба: или одбацити или извући нови узорак па донети суд
14.	H_0: $P_1 = P_2$ (о једнакости пропорција елемената двају основних скупова на основу узорака)	$p_1=m_1/n_1$; $p_2=m_2/n_2$; $q_1=1-p_1$; $q_2=1-p_2$; $t_0=\lvert p_1-p_2\rvert/s_d$; $s_d=\sqrt{\overline{p}\overline{q}\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}$; $\overline{p}=\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$; $\overline{q}=1-\overline{p}$ $t_0<2$,- хипотеза је истинита и пропорције елемената основног скупа су једнаке. $t_0>2$ - хипотеза се одбацује јер је неистинита, односно пропорције елемента основног скупа нису једнаке.

2.2.1. Провера хипотезе о нормалности распореда рецептуром λ- теста

Задатак: 2.1.

Проверити нормалност емпиријског скупа датог у табели 2.2. помоћу λ-теста.

Табела 2.2. Помоћна табела

Р. бр.	x_i mm	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ mm	$t = \frac{\lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\sigma}$	φ(t)	f(t)	f_e	N_e	N_t	$(N_e - N_t)$	max $(N_e - N_t)$
1	26.8	0.31	2.170	0.037	2.39	2	2	2.39	0.39	
2	26.9	0.21	1.470	0.133	8.50	9	11	10.89	0.11	
3	27.0	0.11	0.770	0.294	18.69	18	29	29.58	0.58	
4	27.1	0.01	0.070	0.398	25.05	28	57	54.63	2.37	2.37
5	27.2	0.09	0.630	0.327	20.58	19	76	75.21	0.79	
6	27.3	0.19	1.330	0.163	10.38	8	84	85.59	1.59	
7	27.4	0.29	2.030	0.051	3.21	5	89	88.80	0.20	
8	27.5	0.39	2.660	0.027	1.71	1	90	90.58	0.58	
СУМА:					90	90				

Решење:

За примену λ- теста формирана је табела 2.2. у циљу поједностављења рачунања. Параметри емпиријског скупа: аритметичка средина $\bar{x}$ = 27,11 mm и стандардна девијација σ= 0,142 mm, су раније израчунати.

Вредности функције φ(t) узете су из табеле 1.3, а припадне теоријске фреквенције *f(t)* одређене су помоћу израза:

$$f(t) = \frac{dn}{\sigma} \varphi(t) = \frac{0{,}1 \cdot 90}{0{,}142} \varphi(t) = 63{,}38 \, \varphi(t)$$

Максимална разлика кумулативних емпиријских и теоријске фреквенције износи:

$$\max\left\{ \left| N_e - N_t \right| \right\} = 2{,}37$$

а вредност параметра λ биће:

$$\lambda = \frac{\max\left\{ \left| N_e - N_t \right| \right\}}{n} \sqrt{n} = \frac{2{,}37}{90} \sqrt{90} = 0{,}24982$$

Из табеле 2.3. за λ = 0,249 → P(λ) = 1,00 па се са овом вероватноћом може тврдити да је разлика фреквенција теоријског и емпиријског распореда случајна. С обзиром да је P(λ) ≥ 0,6, то је хипотеза о нормалности основног скупа истинита.

2.2.2. Провера хипотезе о нормалности распореда рецептуром x^2 - теста

Задатак 2.2.

Проверити нормалност емпиријског скупа, датог у задатку 1.7. помоћу x^2 - теста.

Решење:

Ради лакшег рачунања направљена је помоћна табела 2.4. Теоријске фреквенце израчунате су помоћу израза:

$$f(t) = \frac{dn}{\sigma}\varphi(t) = \frac{0{,}1 \cdot 90}{0{,}142}\varphi(t) = 63{,}38\,\varphi(t)$$

Табела 2.3. Вредности вероватноће P(λ) код λ-теста

λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)
0,30	1,000	0,70	0,7112	1,20	0,1122	2,00	0,0007
0,35	0,9997	0,75	0,6272	1,30	0,0681	2,10	0,0003
0,40	0,9972	0,80	0,5441	1,40	0,0397	2,20	0,0001
0,45	0,9874	0,85	0,4653	1,50	0,0222	2,30	0,0000
0,50	0,9639	0,90	0,3927	1,60	0,0120	2.40	0,0000
0,55	0,9228	0,95	0,3275	1,70	0,0062	2,50	0.0000
0,60	0,8643	1,00	0,2700	1,80	0,0032	-	-
0,65	0,7920	1,10	0,1777	1,90	0.0015		

и дате у колони 6 (табела 2.4.). С обзиром на рецептуру χ^2 -теста код које мора бити $f_e \geq 5$, то су прва два групна интервала сажета у један, а то је урађено и са задња два интервала (табела 2.4.) Као крајњи резултат табличног прорачуна добија се:

$$x^2 = \sum \frac{\left(f_e - f_t\right)^2}{f_t} = 0{,}231$$

Табела 2.4. Помоћна табела

Р. бр.	x_i mm	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ mm	$t = \frac{\lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\sigma}$	φ(t)	$f_t = \frac{dn}{\sigma} \varphi(t)$	f_e	$(f_e - f_e)$	$\frac{(f_e - f_t)^2}{f_t}$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	26.8	0.31	2.17	0.038	2.39	2	0.11	$1.34\ 10^{-4}$
2	26.9	0.21	1.47	0.135	8.50	9		
3	27.0	0.11	0.77	0.297	18.69	18	0.69	$5.29\ 10^{-3}$
4	27.1	0.01	0.07	0.398	25.05	28	2.85	0.09025
5	27.2	0.09	0.63	0.327	20.58	19	1.58	0.02774
6	27.3	0.19	1.33	0.165	10.38	8	2.38	0.06294
7	27.4	0.29	2.03	0.051	3.21	5	2.03	0.04579
8	27.5	0.39	2.66	0.012	0.76	1		
СУМА:					90	90		0.231383

При сажитању смањио се број групних интервала n = 8 за n_1 = 2, па ће број степени слободе уважавајући три допунска услова:

$$f_t = 90; \quad \bar{x} = 27{,}11mm; \quad \sigma = 0{,}143mm \text{ , биће}$$
$$SS = k = n - n_1 - 3 = 8 - 2 - 3 = 3$$

Из табеле 2.5. за k = 3 добија се:

P (0,352) = 0,95, и
P (0,185) = 0,98
или 0,98 > P (0,231) > 0,95

Тачна вредност одређује се интерполацијом: P (0,231) = 0,972. Добијена вероватноћа P(0,231) = 97,2% означава да за 97,2% може бити премашено χ^2 = 0,231, и она је већа од 5%, тј.

$$P(\chi^2) = P(0{,}231) = 0{,}972 > 0{,}05$$

па се на основу тога може закључити да су разлике између емпиријских и теоријских фреквенција случајне и тиме се потврђује хипотеза о нормалности емпиријског распореда.

Табела 2.5. Вредности χ^2 у зависности од вероватноће $P(\chi^2 > \chi^2)$і броја степени слободе χ^2- распореда

Stepeni slobode	Verovatnoća $P(\chi^2 > \chi^2_q)$											
k	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0.70	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
1	6,635	5,412	3,841	2,706	1,642	1,074	0,455	0.148	0.0642	0,0158	0.00393	0,000628	0.000157
2	9,210	7,824	5,991	4,605	3,219	2,408	1,386	0.713	0.446	0.211	0.103	0.0404	0,0201
3	11,345	9,837	7,815	6,251	4,642	3,665	2,366	1.424	1,005	0.584	0,352	0,185	0.115
4	13.277	11,668	9,488	7,779	5,989	4,878	3,357	2.195	1.649	1,064	0,711	0.429	0.297
5	15.086	13,388	11,070	9,236	7,289	6,064	4,351	3.000	2.343	1,610	1,145	0.752	0.554
6	16.812	15,033	12,592	10,645	8,558	7,231	5,348	3.828	3.070	2.204	1,635	1.134	0.872
7	18.475	16,622	14,067	12.017	9,803	8,383	6,346	4.671	3.822	2.833	2.167	1.564	1.239
8	20,090	18,168	15,507	13,362	11,030	9,524	7,344	5.527	4.594	3.490	2,733	2,032	1.646
9	21,666	19,678	16,919	14,684	12,242	10,656	8,343	6.393	5,380	4.168	3.325	2,532	2,088
10	23.209	21,161	18,307	15,987	13,442	11,781	9,342	7.267	6.179	4.865	3,940	3.059	2,558
11	24,725	22,618	19,675	17,275	14,631	12,809	10,341	8.148	6.989	5.578	4.575	3.609	3,053
12	26,217	24,054	21,026	18,549	15,812	14,011	11,340	9,034	7.807	6.304	5.226	4,178	3.571
13	27,688	25,472	22,362	19,812	16,985	15,119	12,340	9,926	8.634	7.042	5.892	4.765	4.107
14	29,141	26,873	23,685	21,064	18,151	16,222	13,339	10.821	9.467	7.790	6.571	5.368	4.660
15	30,578	28,259	24,996	22,307	19,311	17,322	14,339	11,721	10.307	8.547	7.261	5.985	5,229
16	32,000	29,633	26,296	23,542	20,465	18,418	15,338	12.624	11,152	9.312	7.962	6.614	5.812
17	33,409	30,995	27,587	24,769	21,615	19,511	16,338	13.531	12.002	10.085	8.672	7,255	6.408
18	34,805	32,346	28,869	25,989	22,760	20,601	17,338	14.440	12.857	10.865	9.390	7.906	7,015
19	36,191	33,687	30,144	27,204	23,900	21,689	18,338	15.352	13.716	11,651	10.117	8.567	7.663
20	37,566	35,020	31,410	28,412	25,038	22,775	19,337	16.266	14.578	12.443	10.851	9.237	8,260
21	38,932	36,343	32,671	29,615	26,171	23,858	20,337	17.182	15.445	13.240	11.591	9.915	8,897
22	40,289	37,659	33,924	30,813	27,301	24,939	21,337	18.101	16.314	14.041	12.338	10.600	9.542
23	41,638	38,968	35,172	32,007	28,429	26,018	22,337	19.021	17.187	14.848	13.091	11.293	10,196
24	42,980	40,270	36,415	33,196	29,553	27,096	23,337	19.943	18,062	15,659	13.848	11.992	10.856
25	44,314	41,566	37,652	34,382	30,675	28,172	24,337	20.867	18,940	16.473	14.611	12.697	11,524
26	45,642	42,856	38,885	35,563	31,795	29,246	25,336	21.792	19.820	17.292	15,379	13,409	12.198
27	46,963	44,140	40,113	36,741	32,912	30,319	26,336	22.719	20.703	18.114	16,151	14.125	12,879
28	48,278	45,419	41,337	37,916	34,027	31,391	27,336	23.647	21.588	18.939	16.928	14,847	13,565
29	49,588	46,693	42,557	39,087	35,139	32,461	28,336	24.577	22.475	19.768	17.708	15,574	14.256
30	50,892	47,962	43,773	40,256	26,250	33,530	29,336	25.508	23.364	20.599	18.493	16,306	14.953

2.2.3. Провера хипотезе о једнакости аритметичких средина два основна скупа на основу њихових узорака

Задатак 2.3.

Из два основна скупа, са нормалним распоредом, извучен је по узорак и израчунате следеће величине, и то за:

први узорак: $n_1 = 10;\quad \bar{x}_1 = 45{,}04;\quad s_1^2 = 0{,}05,$

други узорак: $n_2 = 12;\quad \bar{x}_2 = 44{,}95;\quad s_2^2 = 0{,}12$

Потребно је испитати истинитост хипотезе којом се тврди да су аритметичке средине основних скупова једнаке.

Решење:

Применом Студентовог t-теста, добија се величина t_1 по обрасцу:

$$t_1 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} =$$

$$= \frac{45{,}04 - 44{,}95}{\sqrt{(10-1)\cdot 0{,}05 + (12-1)\cdot 0{,}12}} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 12(10+12-2)}{10+12}} = 0{,}707$$

За број степени слободе SS = к = $n_1 + n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ и $t_1 = 0{,}707$ налази се из табеле 2.6., вероватноћа P = 0,488, која је већа од нивоа значајности $\alpha=0{,}05$. Следи закључак да је разлика аритметичких средина случајна јер вредност $t_1=0{,}707$ случајно одступа од табличне. Значи, прихвата се хипотеза о једнакости аритметичких средина основних скупова, јер је хипотеза тачна.

2.2.4. Провера хипотезе о једнакости варијанси два основна скупа на основу њихових узорака

Задатак 2.4.

За услове:

$n_1 = 10;\quad \bar{x}_1 = 45{,}04;\quad s_1^2 = 0{,}05;$ и

$n_2 = 12;\quad \bar{x}_2 = 44{,}94;\quad s_2^2 = 0{,}12$

утврдити да су разлике варијанси основних скупова, из којих су извучени узорци, случајне.

Р е ш е њ е:

а) Познати су подаци:

$n_1 = 10;\quad \bar{x}_1 = 45{,}04;\quad s_1^2 = 0{,}05;$ и $n_2 = 12;\quad \bar{x}_2 = 44{,}94;\quad s_2^2 = 0{,}12$

b) Величина $F_r\left(s_2^2 > s_1^2\right)$ биће:

$$F_r = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{0{,}12}{0{,}05} = 2{,}4$$

c) Степени слободе биће:

$$SS_1 = к_1 = n_2 - 1 = 12 - 1 = 11$$
$$SS_1 = к_2 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Табела 2.6. Вероватноће P (t < t_1) за Студентов t - распоред

Stepeni slobode k	Verovatnoća $P(t \geq t_1)$ za Studentov t-raspored												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,369	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,985	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,121	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,068	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
∞	0,125	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

За $k_1 = 11$ и $k_2 = 9$ и изабрани ниво значајности $\alpha = 0{,}05$ из табеле 2.7. добија се $F_t = 3{,}115$, па пошто је

$$F_p = 2{,}4 < F_t = 3{,}115$$

закључују се да је разлика варијанси узорака случајна. Значи да узорци припадају основним скуповима једнаких варијанси.

Уважавајући и ранији закључак по коме су и разлике аритметичких средина случајне, то произилази да оба узорка припадају једном истом основном скупу.

Табела 2.7. Вредности F_t за вероватноће α = 0,05 (Ђуричић Р.М., 1995)

k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,25	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,70	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,30	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,82	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	2,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	

Табела 2.8. Вредности F_t за вероватноће α = 0,01 (Ђуричић Р.М., 1995)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	
1	4052,10	4999,03	5403,49	5625,14	5764,08	5859,39	5981,84	6105,83	6234,16	3666,48
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,47	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,23	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	4,96	3,59	3,16
14	8,56	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	6,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65
18	8,28	6,01	5,00	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,01	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	4,94	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,75	3,45	3,12	2,75	2,30
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,30
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,80	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,37	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,82
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,23	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,18	1,68
60	7,08	4,08	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,07	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,03	1,47
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,00	1,43
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	1,98	1,39
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	1,94	1,32
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	1,92	1,27
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	1,88	1,21
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	1,85	1,14
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	1,84	1,11
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	1,83	1,08
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,53	2,20	1,81	1,04
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	-

Задатак 2.5.

Процес обраде конуса врши се на два различита струга. Процесна контрола установила је следећа одступања на узорцима: s_1 = 23,94 μm, n_1 = 25, односно s_2 = 17,13 μm, n_2 = 30. Потребно је проверити одступања на струговима и изабрати бољу машину.

Решење:

Ако применимо стандардну проверу хипотезе о једнакости стандардних девијација по којој је $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ имаћемо да је:

$$F_r = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{23{,}94^2}{17{,}13^2} = 1{,}95$$

Уз ризик од 5% и за степене слободе k_1 = 25 - 1 - 24 и k_2 = 30 - 1 = 29, према табели 2.7. добија се

$$F_t\,(0{,}05\ ;\ 24\ ;\ 29) = 1{,}90$$

Како је 1,95 > 1,90, тј. $F_p > F_t$ хипотеза по којој је $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ се одбија због значајних одступања. Како је $s_1 > s_2$ први струг је нетачнији те се, у случају потребе смањења капацитета, и повишења квалитета може искључити из процеса.

2.2.5. Провера хипотезе о припадности двају узорака истом основном скупу

Задатак 2.6.

Помоћу два полужна микрометра А и Б, оба тачности читања 0,002 mm извршена су мерења једног истог комада прво једним (А), а затим други (Б) микрометром. Резултати одступања од номиналне мере (табела 2.9.) приказани су оним редом како су добијени мерењем.

Табела 2.9. Вредности одступања од номиналних вредности /μm/

Поредак / Мерило	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	2	3	4	3	2	1	0
B	1	2	3	3	4	3	0	2

Поредак / Мерило	9	10	11	12	13	14	15
A	0	2	3	4	5	1	3
B	3	4	1	5	2	3	4

Р е ш е њ е:

Поставимо хипотезу да распоред одступања оба микрометра припада једном основном скупу ($\overline{X}_A = \overline{X}_B$; $\sigma_{0A}^2 = \sigma_{0B}^2$). Да би утврдили истинитост ове хипотезе треба испитати разлике варијанси и аритметичких средина узорака.

Из табеле 2.9. следе параметри узорака:

$$\overline{X}_A = \frac{1}{n_A}\sum x_i = \frac{1}{15}(1+2+3+....+5+1+3) = 2{,}27\ \mu m$$

$$\overline{X}_B = \frac{1}{n_B}\sum x_i = \frac{1}{15}(1+2+3+3+....+2+3+4) = 2{,}67\ \mu m$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n_A}\sum\left(x_i - \overline{X}_A\right)^2 = \frac{1}{15}\left(1-2{,}27\right)^2 + \left(2-2{,}27\right)^2 + ...+ \left(3-2{,}27\right)^2 =$$

$$= 30{,}2\ \mu m^2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{n_B}\sum\left(x_i - \overline{X}_B\right)^2 = \frac{1}{15}\left(1-2{,}67\right)^2 + \left(2-2{,}67\right)^2 + ...+ \left(4-2{,}67\right)^2 =$$

$$= 25{,}3\ \mu m^2$$

Процене варијанси основног скупа, на основу родатака за узорке, износе:

$$s_A^2 = \sigma_A^2 \frac{n_A}{n_A - 1} = 30{,}2\frac{15}{15-1} = 32{,}4\ \mu m^2$$

$$s_B^2 = \sigma_B^2 \frac{n_B}{n_B - 1} = 25{,}3\frac{15}{15-1} = 27{,}1\ \mu m^2$$

Број степени слободе за осену једнакости аритметичких средина биће:

SS = k = $n_A + n_B$ - 2 = 15 + 15 - 2 = 28.

Вредност t_1 параметра износи:

$$t_1 = \frac{\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right|}{\sqrt{\left(n_A - 1\right)s_A^2 + \left(n_B - 1\right)s_B^2}}\sqrt{\frac{n_A\ n_B\left(n_A + n_B - 2\right)}{n_A + n_B}} =$$

$$t_1 = \frac{\left|2{,}27 - 2{,}67\right|}{\sqrt{(15-1)32{,}4 + (15-1)27{,}1}}\sqrt{\frac{15\cdot 15(15+15-2)}{15+15}} = 0{,}201$$

Из табеле 2.6, за k = 28 и t_1 = 0,201 добија се P > 0,8, која је значајно већа од нивоа значајности α = 0,05. Закључак је да узорци припадају основним скуповима са једнаким аритметичким срединама ($\overline{X}_A = \overline{X}_B$), јер је разлика аритметичких средина случајна.

Бројеви степени слободе за осену једнакости варијанси ($s_A^2 = s_B^2$) биће:

$$SS_1 = k_1 = на - 1 = 15 - 1 = 14; \quad SS_2 = k_2 = n_B - 1 = 15 - 1 = 14$$

За k_1 = 14 и k_2 = 14 и ниво значајности α = 0,05 из табеле 2.7. добија се таблична вредност F_t = 2,50.

Рачунѕка вредност F_p функције биће:

$$F_r = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{32{,}4}{27{,}1} = 1{,}20$$

Како је

$$F_t = 2{,}50 > F_p = 1{,}20$$

закључујемо да су разлике варијанси случајне, те узорци припадају основним скуповима једнаких варијанси ($\sigma_{0A}^2 = \sigma_{0B}^2$).

На основу свега изложеног закључује се да узорци припадају једном основном скупу, тј. посматрани полужни микрометри А и В се не разликују по тачности.

Исти задатак може се решити знатно брже применом теста који је заснован на броју инверзија. У том циљу вредности одступања измерених на микрометру А означимо са x, а на Б са y и сврстајмо вредности оба узорка у растући низ (види табелу 2.10.).

Број инверзија за број x биће:

$$y = 0 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 14 = 94$$

Аритметичка средина распореда броја инверзија износи:

$$\overline{u} = E(u) = \frac{mn}{2} = \frac{15 \cdot 15}{2} = 112{,}5$$

Табела 2.10. Помоћна табела

x	y	x	y	x	y	x	x	x	y
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
x	y	x	y	y	x	y	x	y	x
2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
y	x	y	y	x	y	x	y	x	y
3	3	3	4	4	4	4	4	5	5

Варијанса распореда броја инверзија износи:

$$\sigma_u^2 = D_u = \frac{mn}{2}(m+n+1) = \frac{15\cdot 15}{2}(15+15+1) = 3487{,}5 \rightarrow \sigma_u = \sqrt{D(u)} =$$
$$= 59{,}06$$

За ниво значајности q = α = 0,05 је t_q = 2,042, (табела 2.6.), ра су границе критичне области за хипотезу H_0 следеће :

$$u_d \geq \overline{u} - t_q\ \sigma_u = 112{,}5 - 2{,}04\times 59{,}06 = 0$$
$$u_g \leq \overline{u} + t_g\ \sigma_u = 112{,}5 + 2{,}04\times 59{,}06 = 233{,}10$$

С обзиром да је број инверзија у = 94 у границама:

$$0 < у = 94 < 228$$

и не лежи у критичним областима за хипотезу H_0, тј. није мањи од 0 ниti већи од 233, па је отуда хипотеза истинита, а то значи да се полужпи микрометар А не разликује по тачности од полужног микрометра В.

2.2.6. Провера хипотезе о карактеру утицаја извесног фактора

Задатак 2.7.

На истом универзалном стругу обрађује се са бургијom пречника D_1 = 5 mm отвор на првom обратку, и са бургијom пречника D_2 = 12 mm отвор на другом обратку. Из серије обрађених делова бургијom D_1 = 5 mm извучен је узорак од n_1 = 30 обрадака, а затим из друге, која се обрађује бургијом D_2 = 12 mm, узорак n_2 = 20 обрадака. Мерењем су извршене разлике (Δ) између пречника отвора и пречника бургије у оквиру узорака и израчунати параметри:

$$\Delta_1 = 0{,}02\,mm \quad i \quad s_1^2 = 0{,}003 \quad za \quad D_1 = \ \ 5mm$$
$$\Delta_2 = 0{,}05mm \quad i \quad s_2^2 = 0{,}008 \quad za \quad D_2 = 12mm$$

Уз претпоставку да је величина Δ распоређена по нормалном распореду Потребно је проверити истинитост хипотезе да пречник бургије не утиче на вредност разлике између пречника отвора и бургије.

Решење:

За проверу истинитости хипотезе користи се t - tест за кога број степени слободе SS = k_1 величина t износи:

$$SS = k_1 = n_1 + n_2 - 2 = 30 + 20 - 2 = 48$$

Вредност t_1 израчунава се по обрасцу:

$$t_1 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1\ n_2\left(n_1+n_2-2\right)}{n_A+n_B}} =$$

$$t_1 = \frac{0{,}02-0{,}05}{\sqrt{(30-1)\cdot 0{,}003+(20-1)\cdot 0{,}008}}\cdot\sqrt{\frac{30\cdot 20(30+20-2)}{30+20}} = 1{,}04$$

За t_1 = 1,04 и SS = $к_1$ = 48 из табеле 2.6. добија се вероватноћа P > 0,3 која је већа од нивоа значајности α = 0,05 pa се изvоди закључак да вредност t_1 = 1,04 случајно одступа од табличне te је постављена хипотеза истинита.

Значи да пречник бургије 5 mm < D < 12 mm битно не утиче на разлику између пречника отвора и бургије којом се обрађује отвор.

2.2.7. Провера хипотеза о случајности узорка

Задатак 2.8.

При контроли тачности отвора $\Phi 15^{+0,15}$ mm на делу који се обрађује на револвер стругу извучен је из обрађене серије узорак од n = 40 делова. Измерeпi пречници d су приказани у табели 2.11. Потребно је проверити хипотезу о случајности узорка по методу узастопних разлика.

Решење:

Да би проверили хипотезу о случајности узорка неопходпо је прорачунати аритметичку средину и стандардну девијацију узорка. Прорачун ових параметара дат је уз помоћ табеле 2.12.

Табела 2.11. Помоћна табела

N	d_i	N	d_i	N	d_i	N	d_i
1	15.06	6	15.08	11	15.19	16	15.10
2	15.10	7	15.12	12	15.08	17	15.12
3	15.02	8	15.08	13	15.04	18	15.18
4	15.08	9	15.10	14	15.10	19	15.06
5	15.10	10	15.06	15	15.16	20	15.08

N	d_i	N	d_i	N	d_i	N	d_i
21	15.04	26	15.10	31	15.08	36	15.06
22	15.08	27	15.08	32	15.10	37	15.12
23	15.10	28	15.10	33	15.04	38	15.08
24	15.14	29	15.12	34	15.14	39	15.10
25	15.08	30	15.10	35	15.10	40	15.08

Табела 2.12. Помоћна табела

x_i /mm/	f_i	x_i - a	$(x_i - a)^2$	$(x_i - a)f_i$	$(x_i - a)^2 f_i$
15.02	1	-0.08	0.0064	-0.08	0.0064
15.04	3	-0.06	0.0036	-0.18	0.0108
15.06	5	-0.04	0.0016	-0.20	0.0080
15.08	11	-0.02	0.0004	-0.22	0.0044
15.10	13	0	0	0	0
15.12	4	0.02	0.0004	0.08	0.0016
15.14	2	0.04	0.0016	0.08	0.0032
15.16	1	0.06	0.0036	0.06	0.0036
СУМА	40			-0.46	0.038

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum (x_i - a)^2 f_i = 15{,}10 + \frac{1}{40}(-0{,}46) = 15{,}09mm$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i - a)^2 f_i - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{50}0{,}038 - (15{,}09 - 15{,}1)^2} = 0{,}0257mm$$

Вредност величина c^2 прорачунава се по обрасцу:

$$c^2 \; \frac{1}{2(n-1)}\sum d_i^2 = \frac{1}{2\cdot(40-1)}\Big[(15{,}10 - 15{,}06)^2 + (15{,}02 - 15{,}10)^2 + \ldots +$$

$$+ (15{,}08 - 15{,}10)^2\Big] = 0{,}00226$$

Прорачун се поједностављује груписањем d_i исте вредности:

Разлика d_i	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Фреквенција	16	13	9	1	1

$$d_i^2 = 0{,}02^2 \times 16 + 0{,}04^2 \times 13 + 0{,}06^2 \times 9 + 0{,}08^2 \times 1 + 0{,}1^2 \times 1 = 0{,}176$$

$$c^2 = \frac{1}{2 \times 39} \times 0{,}176 = 0{,}00226$$

Процена варијансе основног скупа је:

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = 0{,}0257^2 \cdot \frac{40}{40-1} = 6{,}774 \;\; 10^{-4}$$

Уважавајући да је критеријум δ једнак:

Табела 2.13. Вредности δ_q за проверу хипотезе о случајности узорка

Број елемената узорка	Допуштене доње границе δ_q за нивое значајности		
	q = 0,1%	q = 1%	q = 5%
4	0.295	0.313	0.390
5	0.208	0.269	0.410
6	0.182	0.281	0.445
7	0.185	0.307	0.468
8	0.202	0.331	0.491
9	0.221	0.354	0.512
10	0.241	0.376	0.531
11	0.260	0.397	0.548
12	0.278	0.414	0.564
13	0.295	0.431	0.578
14	0.311	0.447	0.591
15	0.327	0.461	0.603
16	0.341	0.475	0.614
17	0.355	0.487	0.624
18	0.368	0.499	0.633
19	0.381	0.510	0.642
20	0.393	0.520	0.650

$$\delta = \frac{c^2}{s^2} = \frac{0{,}00226}{0{,}0006774} = 3{,}336$$

За ниво значајности q = 0,05 добија се:

$$\delta_q = 1 - \frac{t_q}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1{,}65}{\sqrt{40+1}} = 0{,}74$$

из резултата следи:

$$\delta = 3{,}336 > \delta_q = 0{,}74$$

што значи да се израчуната вредност δ = 3,336 налази изван критичне области која је дефинисана неједначином $\delta < \delta_q$, па је отуда хипотеза о случајности узорка истинита. Значи у тренутку извлачења узорка није дошло до померања центра груписања мера, тј. промене регулисаног положаја алата у односу на радни предмет.

2.2.8. Откривање грубих грешака у елементима емпиријског скупа

Задатак 2.9.

При контроли тачности операције израде отвора $\Phi 10^{+0,1}$ mm извучен је узорак од n = 15 обрадака. Након мерења пречника отвора на свим обрадцима добијена су следећа одступања од номиналне димензије (*Φ10*), и дата у растућем поретку и то: 0,02 - 0,03 - 0,04 - 0,04 - 0,04 - 0,04 - 0,05 - 0,05 -0,05 - 0,08 - 0,09 - 0,09 - 0,09 - 0,10 - 0,20.

Уз претпоставку да се карактертистика квалитета распоређује по нормалном закону потребно је испитати да ли нека од нумеричких вредности карактеристике квалитета у узорку садржи у себи грубу грешку.

Решење:

Поставимо хипотезу да нема грубих грешака у елементима скупа. Параметри узорка биће:

$$\bar{x} = 10 + \frac{1}{15}\left(0,02 + 0,03 + 0,04 + ...+0,20\right) = 10,067mm$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{15}\left(0,02 - 0,67\right)^2 + \left(0,03 - 0,67\right)^2 + ...+\left(0,20 - 0,067\right)^2} = 0,0488mm$$

Ако се изабере ниво значајности q = 2,5%, тада за број елемената n = 15 из табеле 2.14. се добија параметар g_q = 2,638.

Горња допуштена критична граница биће:

$$u_q = \bar{x} + g_q\,\sigma = 10,067 + 2,638 \text{ x } 0,0488 = 10,1957 \text{ mm}$$

Међу елементима узорка видно се разликује од осталих елемената x_{max} = 10,20 mm. Види се да:

$$x_{max} < u_q = \bar{x} + g_q\,\sigma$$

за потврду хипотезе није задовољен услов јер је:

$$x_{max} = 10,20 > u_q = 10,1957 \text{ mm}$$

То значи да елемент x_{max} = 10,20 садржи у себи грубу грешку, тј. хипотеза је неистинита и као таква се одбацује.

Задатак 2.10.

При контроли тачности полужног микрометра 0-25 mm измерена су следећа одступања /μm/ у односу на еталон (крајњу ивичну меру дужине): -2, 0, -1, 1, 2, -1, 0, 2, 1, 2. Пре контроле полужни микрометар је био подешен на нулу ($\bar{x}$=0). Норма његовог растурања при показивању, која се покоравају нормалној расподели, износи: Δ =3 μm.

Потребно је испитати да ли међу показивањима ovог полужног микрометра се појављују грубе грешке.

Табела 2.14. Вредности параметара g_q

Broj elemen. skupa	Nivo značajnosti q			
	q = 0,10	q = 0,05	q = 0,025	q = 0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414
4	1,645	1,689	1,710	1,723
5	1,791	1,869	1,917	1,055
6	1,894	1,996	2,067	2,130
7	1,974	2,093	2,182	2,265
8	2,041	2,172	2,273	2,374
9	2,097	2,237	2,239	2,464
10	2,146	2,294	2,414	2,540
11	2,190	2,343	2,470	2,606
12	2,229	2,387	2,519	2,663
13	2,264	2,426	2,562	2,714
14	2,294	2,461	2,602	2,759
15	2,326	2,493	2,638	2,800
16	2,354	2,523	2,670	2,837
17	2,380	2,551	2,701	2,871
18	2,404	2,577	2,728	2,903
19	2,426	2,600	2,754	2,932
20	2,447	2,623	2,778	2,959
21	2,467	2,644	2,801	2,984
22	2,486	2,664	2,823	3,008
23	2,504	2,683	2,843	3,030
24	2,520	2,701	2,862	3,051
25	2,537	2,717	2,880	3,071

Решење:

Узимајући у обзир да је $\Delta = 6\sigma$ и полазне податке, параметри основног скупа ће бити:

$$\bar{x} = 0; \quad \sigma_0 = \Delta/6 = 3/6 = 0.5\mu m$$

Ако се изабере ниво значајности q = 5% следи:

$$\varnothing\left(t = t_q\right) = \left(1 - \frac{q}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 0{,}5 = \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{\frac{1}{10}} - 0{,}5 = 0{,}49488$$

Из табеле 1.5. добија се $t_q = 2,57$.

С обзиром да је $x_{max} = 2$, тј.:

$$x_{max} = 2 < t_q = 2,57$$

закључује се да показивање полужног микрометра не садржи у себи грубу грешку.

2.2.9. Провера хипотезе о међусобној једнакости низа варијанси

Задатак 2.11.

При контроли процеса израде осовинице извучено је 10 узорака од по n = 15 елемената у одређenim временским интервалиma. После мерења добијене су следеће процене варијанси основних скупова:

$$s_1^2 = 0.03\,,\quad s_2^2 = 0.04\,,\quad s_3^2 = 0.02\,,\quad s_4^2 = 0.04\,,\quad s_5^2 = 0.06$$
$$s_6^2 = 0.03\,,\quad s_7^2 = 0.12\,,\quad s_8^2 = 0.11\,,\quad s_9^2 = 0.14\,,\quad s_{10}^2 = 0.15$$

Потребно је утврдити да ли се, у посматраном периоду, десио поремећај стабилности процеса посматрано преко растурања карактеристике квалитета.

Решење:

Поставимо хипотезу да су варијансе основних скупова, из којих су извучени узорци, међусобно једнаке. С обзиром да узорци садрже исти број елемената (n = 15), и да је: $\max\{s_i^2\} = s_{10}^2 = 0{,}15$ то ће бити:

$$G_{\max} = \frac{\max\{s_i^2\}}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{10}^2} = \frac{0{,}15}{0{,}03 + 0{,}04 + \ldots + 0{,}15} = 0{,}205$$

За дате податке к =10, n - 1 = 15 - 1 = 14, и изабрани ниво значајности =0,05 из табеле 2.15. добија се $G_t = 0,2139$. Види се да је $G_{max} = 0,205 < G_t = 0,2139$ па се на основу тога закључује да је хипотеза истинита, тј. да се процес израде осовинице одвијао у оквирима битно неизмењеног облика криве распореда (разлике између варијанси нису значајне).

Задатак 2.12.

При контроли производне серије која се обрађује на једновретеном шипкастом аутомату извучено је по плану контроле 10 узорака и на њима измерена одређена димензија (карактеристика квалитета). Подаци о узорцима (број елемената n_i и процепе варијанси s_i^2 основних скупова приказапи су у табели 2.16. Потребно је проверити хипотезу о једнакости варијанси основних скупова, тј. утврдити да ли је дошло до поремећаја регулисаног алата током обраде.

Табела 2.15. Вредности Gi = Gt за нивое значајности: 0,05 и 0,01

k \ n-1	Nivo značajnosti 0,05													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,3829	0,2426	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2359	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1380	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0293	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

k \ n-1	Nivo značajnosti o,01													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8998	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,9423	0,8831	0,8335	0,7933	0,7606	0,7335	0,7107	0,6912	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,8643	0,7814	0,7212	0,6761	0,6410	0,6129	0,5897	0,5702	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,6644	0,5685	0,5080	0,4659	0,4347	0,4105	0,3911	0,3751	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,5727	0,4810	0,4251	0,3870	0,3592	0,3378	0,3207	0,3067	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,5358	0,4469	0,3934	0,3572	0,3308	0,3106	0,2945	0,2813	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0.1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	0,5744	0,4069	0,3317	0,2882	0,2593	0,2386	0,2228	0,2104	0,2002	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,3297	0,2654	0,2288	0,2048	0,1877	0,1748	0,1646	0,1567	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	0,3632	0,2412	0,1913	0,1635	0,1454	0,1321	0,1232	0,1157	0,1100	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0759	0,0585	0,0489	0,0429	0,0387	0,0357	0,0334	0,0316	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Решење:

Ради лакшег рачунања величина Q формирана је табела 2.16. из које следе подаци за израчунавања:

$$s^2 = \frac{\sum_{i}^{k} s_i^2 \left(n_i - 1\right)}{N - k} = \frac{0.05868}{140 - 10} = 4.51 \;\; 10^{-4}$$

$$N = \sum n_i = 140$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k}\right) = 1 + \frac{1}{3(10-1)}\left(0.8352 - \frac{1}{140 - 10}\right) =$$

$$c = 1.031$$

$$Q = \frac{2.303}{c}\left[(N - k)\log s^2 - \left(n_i - 1\right)\log s_i^2\right] =$$

$$Q = \frac{2.303}{1.031}\left[(140 - 10)\log\left(4.51 \;\; 10^{-4}\right) - \overline{590}.8\right] = 31.82$$

За изабрани ниво значајности $\alpha = 0{,}05$ и број степени слободе SS =10 - 1 = 9, добија се из табеле 2.5. χ^2 =16,919, што значи да је: Q = 31,82 > χ^2 = 16,919 па је, према томе, хипотеза неистинита што значи да процес обраде није био стабилан с обзиром на растурање посматране карактеристике квалитета.

2.2.10. Провера хипотезе о аритметичкој средини основног скупа на основу великог узорка

Задатак 2.13.

Из производне серије извучен је узорак од n = 46 примерака и након мерења карактеристике квалитета израчунати су аритметичка средина $\bar{x}$ = 25,3 mm и стандардна девијација σ = 0,3 mm узорка. Вредност посматране карактеристике квалитета прописана је да износи: $\bar{X}$ = 25 mm. Потребно је утврдити да ли израчунати подаци показују да се у производном процесу постиже прописани квалитет производа.

Решење:

С обзиром да је познато $\bar{X}$ = 25 mm и $\bar{x}$ = 25,3 mm то је потребно испитати разлику вредности $\bar{x}$ и $\bar{X}$.

Процена стандардне девијације основног скупа биће:

$$s = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 0.3\sqrt{\frac{46}{46-1}} = 0.303mm$$

Табела 2.16. Помоћна табела

Ред. број	n_i	s_i^2	$n_i - 1$	$s_i^2(n_i - 1)$	$\frac{1}{n_i - 1}$	$\log s_i^2$	$(n_i - 1)\log s_i^2$
1	10	6.2 10-4	9	0.00558	0.111	4.792	43.1
2	15	5.8	14	0.00812	0.0715	4.763	66.7
3	15	2.3	14	0.00322	0.0715	4.362	61.1
4	10	9.8	9	0.00882	0.1110	4.991	44.9
5	15	4.3	14	0.00602	0.0715	4.633	64.9
6	20	1.2	19	0.00228	0.0526	4.079	77.5
7	10	6.8	9	0.00612	0.111	4.833	43.5
8	10	6.8	14	0.00714	0.0715	4.708	65.9
9	10	9.9	9	0.00891	0.111	4.996	45.0
10	20	1.3	19	0.00247	0.0526	4.114	78.2
СУМА	140		130	0.05868	0.8352		590.8

Полазни подаци $\bar{x}$ и $\bar{X}$ и израчуната вредност s служе за прорачун величина t_1 и то:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{25.3 - 25}{\frac{0.303}{\sqrt{46}}} = 6.715$$

С обзиром да је t > 3 хипотеза да се, у тренутку узимања узорка, постиже прописани квалитет мора се одбацити. То значи да узорак пе припада основном скупу са аритметичком средином $\bar{x}$ = 25 mm, јер је разлика аритметичких средина узорка и основног скупа значајна.

2.2.11. Провера хипотезе о аритметичкој средини основног скупа на основу малог узорка

Задатак 2.14.

Из производне серије извучен је узорак од n = 11 елемената и израчунати његови параметри: аритметичка средина $\bar{x}$ = 26,8 mm, и стандардна девијација σ = 3,2. Познато је да се та карактеристика покорава нормалном распореду. Потребно је утврдити да ли посматрани узорак потиче из основног скупа чија је аритметичка средина $\bar{X}$ = 28 mm, а да је његов распоред нормалан.

Р е ш е њ е:

Процена стандардне девијације основног скупа, уз познато σ = 3,2 mm и n=11, биће:

$$s = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 3{,}2\sqrt{\frac{11}{11-1}} = 3{,}356mm$$

Уважавајући полазне податке ($\bar{x}$ = 26,8 mm и $\overline{X}$=28 mm) и израчунату вредност s = 3,356 параметар t_1 биће:

$$t_1 = \frac{\left|\bar{x} - \overline{X}\right|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|26.8 - 28|}{\frac{3.356}{\sqrt{11}}} = 1.186$$

за број степени слободе SS = k = n - 1 = 11 - 1 = 10 и t_1 = 1,186 из табеле 2.6. се налази вероватноћа P(t):

$$0{,}2 < P\left(|t| \geq t_1\right) < 0{,}3$$

С обзиром да је ова вероватноћа већа од нивоа значајности P = 0,05, тј. $P\left(|t| \geq t_1\right) > 0{,}05$ то се закључује да је разлика између $\bar{x}$ и $\overline{X}$ случајна. Значи да је хипотеза истинита да узорак потиче из нормално распоређеног основног скупа са аритметичком средином $\overline{X}$ = 28 mm.

Са друге стране могуће је извршити и рроверу аритметичке средине на основу узорка. За изабрани ниво значајности α = 0,05 и број степени слободе SS = к = n - 1 = 11 - 1 = 10 из табеле 1.7. добија се t_p = 2,23 па ће границе поверења аритметичке средине бити:

$$P\left(\bar{x} - t_p\frac{s}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \bar{x} + t_p\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2S\left(t_p, k\right)$$

са вероватноћом 95% вредност аритметичке средине основног скупа биће у опсегу:

$$24{,}54 < \overline{X} < 29{,}O6$$

или:

$$\overline{X} = \bar{x} \pm \varepsilon = \bar{x} \pm t_p\frac{s}{\sqrt{n}} = 26{,}8 \pm 2{,}23\frac{3{,}356}{\sqrt{11}} = 26{,}8 \pm 2{,}26$$

Види се да се вредност $\overline{X}$ = 28 mm налази у израчунатом интервалу поверења, а то се слаже са хипотезом да извучени узорак потиче из нормално распоређеног основног скупа са аритметичком средином $\overline{X}$.

Задатак 2.15.

При изради, на једновретеном аутомату, вретена затварача водосанитарне арматуре потребно је остварити толерисану димензију $\Phi 10^{-0,1}$ mm. Реглер је на основу прорачуна (уважавајући систематске грешке, као и грешке регулисања и мерења) регулисао алат на $\Phi 9,8$ mm. При мерењу пробних комада утврђене су димензије: 9,6; 9,7; 9,8; 9,9; 9,8; и 9,9 mm. Уз претпоставку да се димензије комада покоравају нормалном распореду потребно је утврдити да ли је реглер регулисао алат на прописану радну меру.

Решење:

Нека је хипотеза да је реглер регулисао алат на прописану радну меру $\overline{X}$=9,8 mm, тј. да је овој вредности једнака аритметичка средина основног скупа, из кога је извучен узорак.

Параметри узорка износе:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=\frac{1}{6}(9.6+9.7+9.8+9.9+9.8+9.9)=9{,}783mm$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{6}(9.6-9.783)^2+\ldots+(9.9-9.783)^2}=0{,}111mm$$

Величина t_1 биће:

$$t_1=\frac{\overline{x}-\overline{X}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{9.783-9.8}{\frac{0.122}{\sqrt{6}}}=0.341$$

где је s процена стандардне девијације основног скупа из кога је извучен узорак и износи:

$$s=\sigma\sqrt{\frac{n}{(n-1)}}=0.111\sqrt{\frac{6}{(6-1)}}=0.122mm$$

Из табеле 2.6. за број степени слободе SS = k = n - 1= 6 - 1 = 5 и t_1 = 0,341 добија се:

$$0{,}7<P\left(\left|t\right|\geq t_1\right)<0{,}8$$

Разлика између величина $\bar{x}$ и $\bar{X}$ је случајна и постављена хипотеза је тачна, односно узорак припада нормално распоређеном основном скупу са аритметичком средином $\bar{X}$ =9,8 mm. Значи да је реглер извршио регулисање алата на прописану меру.

2.2.12. Провера хипотезе о пропорцији основног скупа на основу великог узорка

Задатак 2.16.

На полуаутомату "WISST" обрађује се у великим серијама навртка затварача водосанитарних арматура. Дозвољени шкарт с обзиром на унутрашњи пречник износи Po =2%. Контролор је, у узорку од n = 1000 комада навртки нашао m = 50 нетачно обрађених навртки. Потребно је проверити хипотезу да проценат нетачно обрађених навртки у производној серији не прелази дозвољени број од 2%.

Решење:

Постављена хипотеза гласи P = Po = 2%.
Пропорција нетачно обрађених навртки у узорку износи:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{50}{1000} = 0.05$$

Стандардна грешка износи:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p_o Q_o}{n}} = \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{1000}} = 0.00443 mm$$

Параметар t_o износи:

$$t_o = \frac{p - P_o}{\sigma_p} = \frac{0.05 - 0.02}{0.00443} = 6.77 > 3$$

Значи да разлика $\left| p - P_o \right|$ = 0,03 је значајна, тј. проценат нетачно обрађених навртки у узорку значајно се разликује (већи је) од допуштеног, па се са тог разлога хипотеза P = Po = 2 % одбацује као нетачна.

2.2.13. Провера хипотезе о једнакости пропорција елемената двају основних скупова на основу узорака

Задатак 2.17.

Серија истих зупчапика обрађује се на двема различитим машинама. При контроли карактеристике квалитета атрибутивним путем извучен је по један случајан узорак са сваке машине. Од $n_1 = 600$ комада са прве машине 540 су били добри, а $m_1 = 60$ лоши, а од $n_2 = 300$ комада са друге машине 250 су били добри, а $m_2 = 40$ лоши.

Потребно је утврдити да ли ове две машине обрађују делове са истом тачношћу обраде, односно са иstим процентуалним бројем лоших комада.

Решење :

Пропорције лоших комада у узорцима износе:

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{60}{600} = 0{,}1$$

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{40}{300} = 0{,}133$$

Величине $\overline{p}, \overline{q}$ и s_d износе:

$$\overline{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{60+40}{600+300} = 0{,}111$$

$$\overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0{,}111 = 0{,}889$$

$$s_d = \sqrt{\overline{p}\overline{q}\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{0{,}111 \cdot 0{,}889 \frac{600+300}{600 \cdot 300}} = 0{,}0222$$

Величина t_o, на основу израчунатих p_1, p_2 и s_d износи:

$$t_o = \frac{p_1 - p_2}{s_d} = \frac{0.1 - 0.133}{0.0222} = 1.486 < 2$$

С обзиром да је $t_o = 1{,}486 < 2$ то је закључак да је разлика пропорција лоше обрађених делова на посматраним машинама случајна. То значи да обе машине постижу исти квалитет обраде, тј. исти % лоше обрађених комада.

Задатак 2.18.

Обликовање праха се обавља на две различите пресе и треба проверити да ли њихови процеси дају исти квалитет. Са једне пресе узет је узорак од $n_1 = 1500$ испресака и у њему је нађеnо $37 = x_1$ неисправних, док је са друге пресе узет узорак од $n_2 = 1200$ испресака и у њему је нађеnо $x_2 = 54$ неисправних.

Решење:

Провериће се хипотеза $H_0 : P_1 = P_2$ ра се користи формула $\overline{p} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ и добија:

$$\overline{p}=\frac{37+54}{1500+1200}=\frac{91}{2700}=0{,}034$$

Примењујући услов:

$$\left|\frac{x_1}{n_1}-\frac{x_2}{n_2}\right|>1{,}96\sqrt{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)} \text{ добија се:}$$

$$\left|\frac{37}{1500}-\frac{54}{1200}\right|>1{,}96\sqrt{0{,}034\ \left(1-0{,}034\right)\ \left(\frac{1}{1500}+\frac{1}{1200}\right)} \text{ односно:}$$

$$\left|\ -0{,}02\ \right|>0{,}014$$

Постављени услов је задовољен па се хипотеза $H_0 : p_1 = p_2$ мора одбацити са ризиком од 5% јер постоји значајна разлика у раду, међу пресама. Како су вероватноће неисправних испресака у узорцима: $\frac{37}{1500}=0{,}025$ и $\frac{54}{1200}=0{,}045$, односно 2,5% < 4,5% то се закључује да прва преса има знатно мањи проценат неисправности и да се друга преса, у случају потребе смањења капацитета, треба искључити.

3. МЕТОД КРИВИХ РАСПОРЕДА ФРЕКВЕНЦИЈА

Метод кривих распореда фреквенција се широко користи у статистичком управљању квалитетом у: пријемној контроли, међуфазној контроли, завршној контроли, управљању квалитетом у процесу израде производа, подешавању производне опреме, испитивању способности обрадног и технолошког процеса, дефинисању толеранције и перформанси новог производа, превентивној контроли способних процеса, испитивању технолошке способности производне опреме итд.

Основне етапе метода кривих распореда фреквенција су:

1. Утврђивање, зависно од производне праксе или програма циљева и услова испитивања, предмета и основних задатака испитивања и дефинисање величина емпиријског скупа (скупова).

2. Статистичка обрада емпиријског скупа (узорка), и

3. Анализа и коначни закључци о полазним циљевима испитивања.

За науку о квалитету је од изузетног значаја да узорак буде репрезентативан, јер су тада и информације о основном скупу довољно поуздане. У том циљу се узорак изабира коришћењем табеле случајних бројева. Са друге стране, из релација које дефинишу ширину интервала поверења оцењених статистичких параметара ($\overline{x}, \sigma_0$ и др.) види се изразит утицај величине узорака: већа величина узорка - ужи интервали и обрнуто (при истој вредности статистичке вероватноће P).

Статистичка обрада емпиријског скупа врши се преко **параметара распореда**, који дефинишу:

- *локацију (аритметика средина, мода и медијана),*
- *дисперзију (распон и стандардна девијација), и*
- *облик распореда фреквенција.*

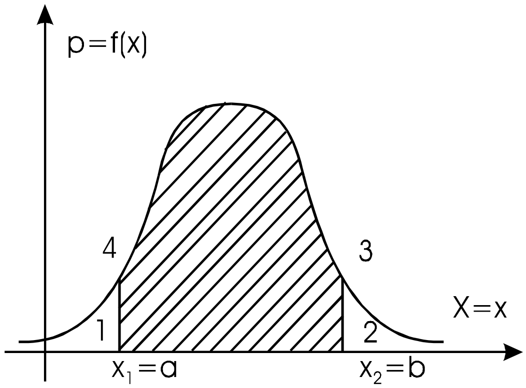
3.1. СТАТИСТИЧКЕ ГРАНИЦЕ ТОЛЕРАНЦИЈЕ

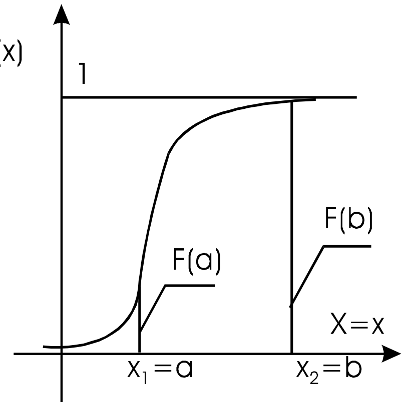
Статистичке границе толеранције (природне границе процеса - Тп) одређују границе дисперзије вредности дате карактеристике квалитета неког производа који се обрађују на обрадном систему. Оне, значи, одређују ***способност обрадног система:*** ако је ширина интервала поверења IP:

IP = Tp = g_2 - g_1 < T = прописана толеранција, тада је обрадни процес способан и обрнуто *ако је Тп > Т обрадни процес није способан.* У пракси статистичког управљања квалитетом од изузетног значаја је крива нормалног распореда која је симетрично распоређена око аритметичке средине $\overline{x}$, звонастог је облика, и случајна промењива x варира у границама (-oo,+oo) (слика 1.6) Функција распореда дефинише се релацијом:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\overline{x})}{2\sigma^2}} dx,$$

и биће: F (-oo), и F (+oo) = 1.





Слика 3.1.Крива закона вероватноће

Слика 3.2. Функција распореда континуалне случајне променљиве

Функција распореда (слика 3.2), значи, дефинише вероватноћу P да случајна величина X буде мања или једнака вредности x. Ова функција има својства:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) \tag{3.1.}$$

Функција распореда представља површину испод криве распореда фреквенција у интервалу (x_1,x_2) (површина 1234 на слици 3.1.). Отуда вероватноћа да се случајна променљива нађе у интервалу (x_1,x_2) биће једнака:

$$P\left(x_1 < x < x_2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx \tag{3.2.}$$

У пракси статистичког управљања квалитетом уводи се стандардизована случајна величина:

$$t_i = \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sigma} \tag{3.3.}$$

После смене у релацији (3.2.) добија се:

$$P\left(x_1 < x < x_2\right) = \varnothing\left(t_2\right) - \varnothing\left(t_1\right) = \varnothing\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right) - \varnothing\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right) \tag{3.4.}$$

У случају да је положај x_1 и x_2 симетричан у односу на $\bar{x}$ тј. да је $\left| x_1 - \bar{x} \right| = \left| x_2 - \bar{x} \right|$ тада ће бити $t_1 = t_2$, а с обзиром да је $-\Phi(t) = \Phi(-t)$, имаћемо да је:

$$P\left(\bar{x} - t_0 < \bar{X} < x + t_0\right) = \varnothing(t) - \varnothing(-t) = \varnothing(t) + \varnothing(t) = 2\varnothing(t) \tag{3.5.}$$

Област ограничена са $\bar{x} \pm 3\sigma$ назива се област статистичке толеранције (природне толеранције) и у тој области се налази 99,73% обрађиваних делова. Са друге стране, у области $\bar{x} \pm 2\sigma$ налази се 95,44%, а у области $\bar{x} \pm \sigma$ налази се 68,26% свих вредности случајне променљиве.

Вероватноћа да се вредност случајне променљиве нађе изван области $\bar{x} \pm t_0$ биће:

$$q = \left[1 - \varnothing(\ t\ )\right] \cdot 100\% \qquad (3.6.)$$

Величина q представља шкарт, тј. (при обради) број обрађених израдака, који не задовољавају услове из спецификације.

Пример 3.1.: За довољно велики узорак, чији распоред димензија следи Гаусову расподелу, мерењем и каснијим рачунањем утврђени су параметри: $\bar{x}$ =22 мм и σ = σₒ = 0,05 мм. Прописана ширина толеранцијског поља T = 120 μм симетрично је распоређена око аритметичке средине $\bar{x}$. Потребно је израчунати % вероватног шкарта под претпоставком да се неће мењати почетни услови обраде.

Решење:

Област тачно обрађених делова одређена је изразом:

$$x \pm 0{,}5T = 22 \pm 0{,}5 \cdot 0{,}12 = 22 \pm 0{,}06, \text{ то јест}$$
$$x_{\min} = 21{,}94mm \text{ и } x_{\max} = 22{,}06mm$$

Вероватноћа тачно обрађених комада, коришћењем табеле 1.6. и уважавајући симетричан положај толеранција износи:

$$P\left(x_{\min} < x \leq x_{\max}\right) = P\left(\ 21{,}94 < x \leq 22{,}06\right) = 2\varnothing\left(\ t\ \right) = 2\varnothing(1{,}2) = 0{,}7699$$

где је: $T = \dfrac{\left(x_{\max} - \bar{x}\right)}{\sigma} = \dfrac{(22{,}06 - 22)}{0{,}05} = 1{,}2$

Тражени % вероватног шкарта у току технолошког процеса износи:

$$q = \left[1 - 2\varnothing(\ t\ )\right] \cdot 100 = (1 - 0{,}7699) \cdot 100 = 23{,}01\%$$

Пример 3.2.: За репрезентативан узорак утврђено је: $\bar{x}$ = 18 mm и σ = σₒ = 0,20 mm. Под претпоставком да се распоред дате димензије покорава нормалној (Гаусовој) расподели потребно је израчунати вероватноћу да ће вредност димензија бити у интервалу (x_1 = 17,9 ; x_2 = 18,2)?

Решење:

Вредности стандардизованих случајних променљивих биће:

$$t_1 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{18{,}2 - 18{,}0}{0{,}2} = 1; \quad t_2 = \frac{\left|x_1 - \bar{x}\right|}{\sigma} = \frac{\left|17{,}9 - 18{,}0\right|}{0{,}2} = 0{,}5$$

Овим вредностима из табеле 1.5. одговарају Ф(1)=0,3415 ; Ф(0,5)=0,1915. Вероватноћа да се посматрана димензија нађе у интервалу од 17,9 mm до 18,2 mm износи:

$$P(17{,}9 < x < 18{,}2) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5) = 0{,}3415 - 0{,}1915 = 0{,}15 \text{ или } 15\% .$$

3.2. Статистичко моделирање емпиријског скупа

Статистичко моделирање емпиријског скупа састоји се у идентификацији облика распореда овог скупа. Ми ћемо се овде детаљније забавити конструисањем криве Гаусовог распореда за узорак (емпиријски скуп) који следи модел нормалног распореда фреквенција.

Ако се тестирањем потврди хипотеза о нормалности емпиријског скупа, тада се припадне теоријске фреквенце $\boldsymbol{f_{ti}}$ одређују из једначине:

$$f_{ti} = N\frac{d}{\sigma}\varphi(t) = C\varphi(t) \qquad (3.7.)$$

где је: N-број елемената емпиријског скупа, д-групни интервал, σ-стандардна девијација емпријског скупа, а φ(т)- функција чија је вредност:

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (3.8.)$$

Табличне вредности φ(t) дате су у табели 1.3.

Поступак израчунавања теоријских фреквенција f_{ti} састоји се значи у множењу односних табличних вредности φ(t), константом C=Nd/σ. То је сликовито приказано сабирањем површина појединих правоугаоника на слици 3.3., и за праксу поседује задовољавајућу тачност.

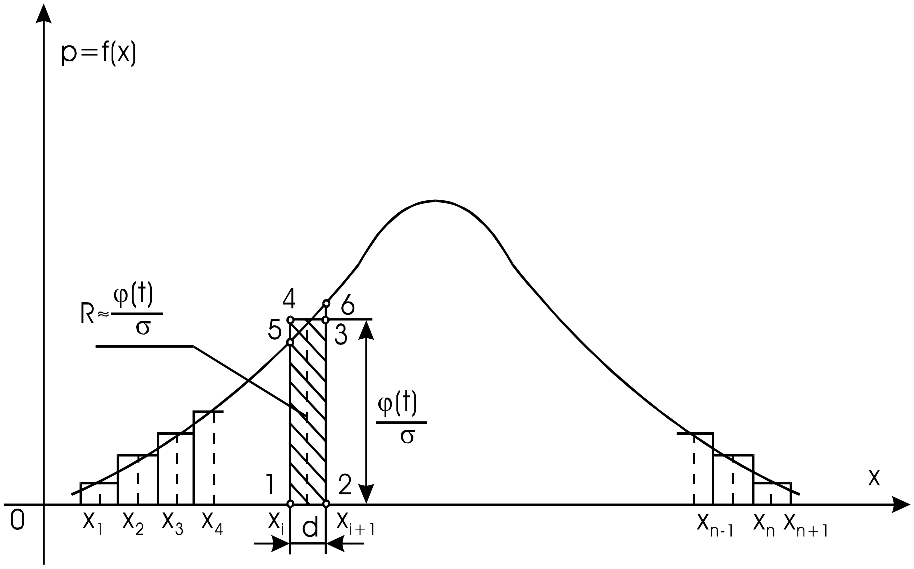
Задатак 3.1.

При статистичкој контроли карактеристике квалитета извучен је узорак од N = 9O комада и измерена карактеристика приказана је у табели 3.1. Потребно је:

1. Израчунати аритметичку средину и стандардну девијацију σ емпиријског скупа,

2. Оценити на основу коефицијената асиметрије α и спљоштености β да ли нумеричке вредности карактеристике квалитета припадају закону нормалног распореда, и

3. У случају позитивног резултата под 2. прилагодити нормални распоред датом емпиријском скупу.



Слика 3.3. Приказ одређивања теоријских фреквенци f_{ti} нормалне расподеле

Табела 3.1. Помоћна табела

x_1	f_1	$(x_и-a)$	$(x_и-a)^2$	$(x_и-a)f_и$	$(x_и-a)^2f_и$
26.8	2	-0.3	0.09	-0.6	0.18
26.9	9	-0.2	0.04	-1.8	0.36
27.0	18	-0.1	0.01	-1.8	0.18
27.1	28	0	0	0	0
27.2	19	0.1	0.01	1.9	0.19
27.1	8	0.2	0.04	1.6	0.32
27.4	5	0.3	0.09	1.5	0.45
27.5	1	0.4	0.16	0.4	0.16
СУМА:	90			1.2	1.84

Решење:

1. Параметре распореда емпиријског скупа одређујеmo уз помоћ табеле 3.1. и то:

Аритметичка средина:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N}\sum\left(x_i - a\right) f_i = 27{,}1 + \frac{1}{90}\cdot 1{,}2 = 27{,}11\ mm$$

Стандардна девијација:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - a)^2 f_i - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{90}\cdot 1{,}84 - (27{,}11 - 27{,}1)^2} = 0{,}142$$

2. Коефицијенти асиметрије α и спљоштености β емпиријског скупа рачунају се по обрасцима:

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\ ; \quad \beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

где су μ_3 и μ_4 централни моменти трећег и четвртог реда, дефинисани изразима:

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^3 f_i\ ; \quad \mu_4 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^4 f_i$$

Централни моменти израчунавају се уз помоћ табеле 3.2.

Табела 3.2. Помоћна табела

xи	fи	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$	$(x_i - \bar{x})^3 f_i$	$(x_i - \bar{x})^4 f_i$
26.8	2	-0.31	-0.0298	$92.35\ 10^{-4}$	$-59.6\ 10^{-3}$	$184.70\ 10^{-4}$
26.9	9	-0.21	$-9.26\ 10^{-3}$	$19.45\ 10^{-4}$	$-83.34\ 10^{-3}$	$175.03\ 10^{-4}$
27.0	18	-0.11	$-1.33\ 10^{-3}$	$1.46\ 10^{-4}$	$-25.94\ 10^{-3}$	$26.35\ 10^{-4}$
27.1	28	-0.01	0	0	0	0
27.2	19	0.09	$0.73\ 10^{-3}$	$0.66\ 10^{-4}$	$13.87\ 10^{-3}$	$12.47\ 10^{-4}$
27.3	8	0.19	$6.86\ 10^{-3}$	$13.03\ 10^{-4}$	$54.88\ 10^{-3}$	$104.27\ 10^{-4}$
27.4	5	0.29	$24.39\ 10^{-3}$	$70.73\ 10^{-4}$	$121.95\ 10^{-3}$	$353.64\ 10^{-4}$
27.5	1	0.39	$59.32\ 10^{-3}$	$231.34\ 10^{-4}$	$59.32\ 10^{-3}$	$231.34\ 10^{-4}$
СУМА	90				$83.14\ 10^{-3}$	$1087.8\ 10^{-4}$

На основу родатака из табеле 3.2. израчунавају се:

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^3 f_i = \frac{1}{90}\cdot 83{,}14\ 10^{-3} = 0{,}924\ \ 10^{-3};$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^4 f_i = \frac{1}{90}\cdot 83{,}14\ \ 10^{-4} = 12{,}09\ \ 10^{-4},$$

а затим и вредности коефицијената асиметрије α и спљоштености β:

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0{,}924\ \ 10^{-3}}{0{,}143^3} = 0{,}316 \cong 0$$

$$\beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{12{,}09\ \ 10^{-4}}{0{,}143^4} = 2{,}892 \cong 3$$

На основу $\alpha = 0$ и $\beta = 3$ закључује се да нумеричке вредности карактеристика квалитета се покоравају, мада не сасвим поуздано, закону нормалног распореда, па се емпиријски распоред може интерпретирати законитостима нормалног распореда.

3. Прилагођавање нормалног распореда датом емпиријском скупу врши се преко једначина припадних теоријских фреквенција f_{ti}, тј.:

$$f_{ti} = N\frac{d}{\sigma}\varphi(t) = C\varphi(t)$$

односно теоријских вероватноћа P_{ti}, тј.:

$$P_{ti} = \frac{d}{\sigma}\varphi(t) = C_1\varphi(t)$$

где је d-дужина групног интервала.

Прорачун теоријских фреквенција спроведен је табеларно (табела 3.3.). Теоријске фреквенције израчунате су из једначине:

$$f_{ti} = C\varphi(t) = 62{,}94\,\varphi(t)$$

где је:

$$C = N\frac{d}{\sigma} = 90\cdot\frac{0{,}1}{0{,}143} = 62{,}94$$

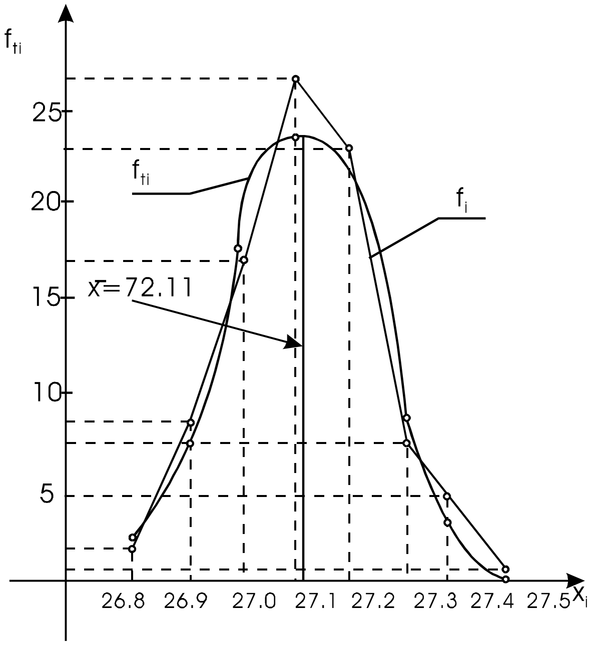
при чему је дужина групног интервала d = 0,1 = conct.

Припадне вредности функције $\varphi(t)$ узете су из табеле (1.3.)

Табела 3.3. Табела за прорачун теоријске фреквенције

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$t = \frac{\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{\sigma}$	$\varphi(t)$	$f_{ti}=62.94\varphi(t)$
26.8	2	0.31	2.17	0.03788	2.38
26.9	9	0.21	1.47	0.13542	8.52
27.0	18	0.11	0.77	0.29659	18.67
27.1	28	0.01	0.07	0.39797	25.05
27.2	19	0.09	0.63	0.32713	20.59
27.3	8	0.19	1.33	0.16474	10.37
27.4	5	0.29	2.03	0.05082	3.20
27.5	1	0.39	2.66	0.0116	0.73
СУМА:	90				90

У последњој колони табеле 3.3. дат је прорачун фреквенција f_{ti} и на основу тога на слици 3.4. нацртан је емпиријски полигон фреквенција и коресподентна прилагођена теоријска крива распореда.



Слика 3.4. Емпиријски полигон фреквенција f_i и прилагођена теоријска крива распореда f_{ti} нормалног скупа

Задатак 3.2.

Потребно је извршити контролу N = 82 пречника отвора димензије $D = 70^{+0,07}_{+0,04}\,mm$. Контролом су добијена следећа одступања у 0,001 mm:

58 56 61 57 62 58 62 64 60 59 57 60 63 61 57 64 59 61 59 63
61 62 59 65 63 58 65 61 64 63 57 60 57 62 60 59 56 62 59 60
57 62 60 62 58 64 63 55 59 60 63 57 58 61 62 59 65 60 58 63
60 57 61 59 60 65 63 55 61 59 62 56 65 61 63 52 67 68 60 62
61 58

Потребно је одредити:
1. Распон расипања измерепе димензије, R
2. Број групних интервала по обрасцу I = 5 logN,
3. Дужипу групних интервала по обрасцу d = R/I,
4. Аритметичку средину $\bar{x}$,
5. стандардну девијацију узорка σ,
6. Коефицијенте асиметрије α и спљоштености β,
7. Утврдити нормалност распореда,

8. Конструкцију емпиријске и теоријске расподеле измерених димензија, ако је прихваћен нормални распоред,
9. Оцену основног скупа на основу узорка и то:
   9.1. Непознате аритметичке средине $\overline{X}$,
   9.2. Размака поверења непознате стандардне девијације основног скупа σ_0.

Решење:

Анализом добијеног распореда у узорку N=82 добија се:

1. Распон расипања измерепе димензије:

   $R = x_g - x_d = 68 - 52 = 16\ \mu m$,

2. Број групних размака (интервала):

   I = 5 1ogN = 5 1og 82 = 9,57 = 9

3. Дужина групних интервала:

   $d = R/I = 16/9 = 1,78 = 2\ \mu m$

4. Аритметичка средина $\bar{x}$ биће:

$$\bar{x} = a + \frac{d}{N}\sum b_i f_i = 60{,}5 + \frac{2}{82}(-5) = 60{,}4\ \mu m; \quad \bar{x}_s = 70{,}0604\, mm$$

5. Стандардна девијација узорка σ израчунава се по обрасцу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{d^2}{N}\sum f_i b_i^2 - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{2^2}{82}175 - (60{,}4 - 60{,}5)^2} = 2{,}92$$

   Вредности за а и $\sum f_i b_i^2$ узете су из помоћне табеле 3.4.

6. Коефицијенти асиметрије α и спљоштености β биће:

$$\alpha = \mu_3/\sigma^3;\ \beta = \mu_4/\sigma^4$$

   И ovo израчунавање извршићемо уз помоћ табела 3.4. и 3.5.

   Централни моменти трећег μ_3 и четвртог реда μ_4 биће:

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^3 f_i = \frac{1}{82}(-121) = -1{,}476$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^4 f_i = \frac{1}{82}17{,}679 = 215{,}6$$

   Коефицијенти асиметрија α и спљоштености β сада биће:

$$\alpha = \mu_3/\sigma^3 = -1{,}476/2{,}92^3 = -0{,}06, \text{ и}$$

$$\beta = \mu_4/\sigma^4 = 215{,}6/2{,}92^4 = 2{,}97 \cong 3$$

Табела 3.4. Анализа расподеле

I	Групни размак	x_i /µm/	Расподела фреквенци	fi	$b_i = \frac{x-a}{d}$	$b_i f_i$	$f_i b_i^2$
1	51.5-53.5	52.5	/	1	-4	-4	16
2	53.5-55.5	54.5	//	2	-3	-6	18
3	55.5-57.5	56.5	//// //// /	11	-2	-22	44
4	57.5-59.5	58.5	//// //// //// //	17	-1	-17	17
5	59.5-61.5	a=60.5	//// //// //// //// /	21	0	0	0
6	61.5-63.5	62.5	//// //// //// ////	19	1	19	19
7	63.5-65.5	64.5	//// ////	9	2	18	36
8	65.5-67.5	66.5	/	1	3	3	9
9	67.5-69.5	68.5	/	1	4	4	16
СУМА				82		-5	175

Табела 3.5. Помоћна табела за прорачун централних момената

x_1 /µm/	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$	$(x_i - \bar{x})^3 f_i$	$(x_i - \bar{x})^4 f_i$
52.5	1	-7.9	-493	3895	-493	3895
54.5	2	-5.9	-205	1212	-410	2424
56.5	11	-3.9	-59	231	-649	2541
58.5	17	-1.9	-7	13	-119	221
60.5	21	0.1	0	0	0	0
62.5	19	2.1	9	19	171	361
64.5	9	4.1	69	283	621	2547
66.5	1	6.1	227	1385	227	1385
68.5	1	8.1	531	4305	531	4305
СУМА	82				-121	17679

7. На основу вредности $\alpha = 0$ и $\beta \cong 3$ утврђује се да је расподела емпиријског скупа приближно нормална.

8. Конструкција емпиријске и теоријске криве расподеле измерених димензија, врши се преко једначипе припадних теоријских фреквенција f_{ti}, тј.:

$$f_{t\,i} = N\frac{d}{\sigma}\,\varphi(t) = 82\frac{2}{2{,}92}\,\varphi(t) = 56{,}2\,\varphi(t)$$

Резултати израчунавања теоријских фреквенција приказани су у табели 3.6. и на слици 3.5.

9. Основни скуп на основу овог узорка оцењује се и то:

9.1. Непозната аритметичка средина према обрасцу:

$$P\left(\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < x \leq x + t\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2\varnothing(t)$$

Процена стандардне девијације основног скупа, на основу узорка, израчунава се по обрасцу:

$$s = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}} = 2{,}92\sqrt{\frac{82-1}{82}} = 2{,}9$$

Табела 3.6. Табела за прорачун теоријских фреквенција

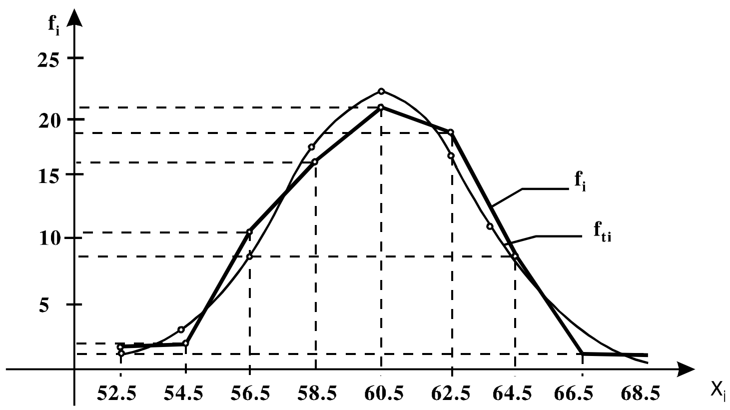
x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$t = \frac{\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{\sigma}$	φ(t)	f_{ti}
52.5	1	-7.9	2.40	0.02239	1.26
54.5	2	-5.9	2.02	0.05186	2.91
56.5	11	-3.9	1.34	0.16256	9.14
58.5	17	-1.9	0.65	0.32297	18.15
60.5	21	0.1	0.03	0.39876	22.41
62.5	19	2.1	0.72	0.30785	17.30
64.5	9	4.1	1.4	0.14973	8.41
66.5	1	6.1	2.09	0.04491	2.52
68.5	1	8.1	2.77	0.00861	0.48
СУМА	82				□82

Из табеле 1.6. за усвојено $2\Phi(t)$ = 0,9973 добија се t=3 па ће $\bar{X}$ бити:

$$P\left(60{,}4 - 3\frac{2{,}9}{\sqrt{82}} < \bar{X} \leq 60{,}4 + 3\frac{2{,}9}{\sqrt{82}}\right) = 0{,}9973 \quad \text{или}$$

59,44 < $\bar{X}$ ≤ 61,36, односно

$\bar{X}_{max}$ = 70,06136 mm
$\bar{X}_{мин}$ = 70,05944 mm



Слика 3.5. Емпиријски полигон фреквенција и прилагођена теоријска крива распореда нормалног скупа

9.2. Размак поверења непознате стандардне девијације основног скупа биће:

$$\sigma_o = s \pm \varepsilon$$

При чему је:

$$P\ (s - s_x q_s < \sigma_o \leq s + s_x q_s = P_L$$

уз усвојену поузданост $L(q_s,k) = 0,999$ и број степени слободе $k = n - 1 = 82 - 1 = 81$ добија се из табеле 1.8. $q_s = 0,30$ па је тражени размак поверења непознате стандардне девијације основног скупа:

$$2,9 - 2,9 \times 0,30 < \sigma_o \leq 2,9 + 2,9 \times 0,30$$

или

$$2,93 < \sigma_o \leq 3,77$$

3.3. СТАТИСТИЧКИ ЛИСТ И ДИЈАГРАМ ВЕРОВАТНОЋЕ

Метод кривих распореда фреквенција користи за обраду резултата, њихову презентацију и анализу:

1. статистички лист, и

2. дијаграм вероватноће.

Статистички лист се састоји из три дела :

а) горњег, у коме су садржане опште информације о предмету који се контролише,

б) средњег, који садржи резултате мерења карактеристике квалитета, и

ц) доњег, у коме су садржани коначни резултати операције контролисања.

Број групних интервала k се, у пракси, бира на различите начине и то (Станић, Ј., 1985):

1. $k = 5 \log N$,

2. $k = \sqrt{N}$, и

3. $6 < k < 20$, зависно од броја елемената N и сл.

За дати распон расипања R одређује се ширина групног интервала d = R/к. d је константно за све групе.

Основа графичког прорачуна путем дијаграма вероватноће је Хенријева права, која омогућује да се утврди:

- нормалност распореда,
- аритметичка средина $\overline{x}$,
- стандардна девијација σ,
- способност процеса (природна граница процеса), и
- проценат карактеристика квалитета испод и изнад толеранцијског поља.

Задатак 3.3.

Ради анализе технолошке стабилности и тачности једног текућег технолошког процеса, који се односи на карактеристику квалитета x=$\Phi 143^{+0,18}$ mm, извучен је узорак од n =150 обрађених делова, сагласпо плану контроле. Карактеристика квалитета измерена је мерним средством тачности 0,01 mm. Сређени резултати мерења (фреквенце су груписане у девет групних интервала са ширином интервала d = 0,02 mm = conct.) приказани су у статистичком листу (слика 3.6.).

Потребно је;

1. Извршити комплетну анализу способности процеса помоћу статистичког листа (аналитичка метода), и
2. Извршити комплетну анализу способности процеса помоћу Дијаграма вероватноће (графички метод).

Решење:

1. Статистички лист (слика 3.6) представља аналитичку проседуру метода кривих распореда фреквенција при анализи технолошке способности процеса. Статистичка анализа резултата мерења врши се, као што је напред речепо, у трећем делу статистичког листа по проседури:

1.1. Аритметичка средина:

$$\bar{x} = a + \frac{d}{n}\sum b_i\ f_i = 142{,}09 + \frac{0{,}02}{150}(-23) = 142{,}087mm$$

где је ширина интервала d = 0,02 mm и величина са највећom фреквенцијom a=142,09 mm.

1.2. Стандардна девијација:

$$\sigma = d\sqrt{\frac{1}{n}\left(b_i^2\ f_i\right) - \left(\frac{1}{n}b_i\ f_i\right)^2} = 0{,}02\sqrt{\frac{1}{150}551 - \left(\frac{1}{150}23\right)^2} = 0{,}038\,mm$$

1.3. Осена стандардне девијације σ_o основног скупа:

$$s = \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 0{,}0382\sqrt{\frac{150}{150-1}} = 0{,}0383\,mm$$

1.4. Интервал поверења (IP)

$$\overline{X} = \bar{x} \pm t_p\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 142{,}087 \pm 2{,}58\frac{0{,}0383}{\sqrt{150}} = 142{,}087 \pm 0{,}008$$

у којем се са вероватноћом Pgs =2Φ(t) (у овом случају за усвојено Pgs = 0,99012) налази непозната аритметичка средина $\bar{x}$ основног скупа, где је t_p = t= 2,58 добијеnо из табеле 1.6.

Пословни систем:		**СТАТИСТИЧКИ ЛИСТ**	Серија:
Део	Број	**Обрада резултата мерења**	Налог:
Материјал	Стање	Карактеристика квалитета: $x = \Phi 142^{\pm 0,18}$ мм	Напомене:
Операција		Услови контроле	
Радник		Контролор / Датум	

Границе групних интервала	Маркирање апсолутних фреквенција	f_i	$b_i = (x_i-a)/d$	$b_{ix}f_i$	$b_i^2{}_x f_i$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
142,16 - 142,18	////	4	4	16	64
142,14 - 142,16	///// ///// /	11	3	33	99
142,12 - 142,14	///// ///// ///// /	16	2	32	64
142,10 - 142,12	///// ///// ///// ///// ///	23	1	23	23
142,08 - 142,10	///// ///// ///// ///// ///// /////	30	0	0	0
142,06 - 142,08	///// ///// ///// ///// ///// //	27	-1	-27	27
142,04 - 142,06	///// ///// ///// ///// /	21	-2	-42	84
142,02 - 142,04	///// ///// ////	14	-3	-42	126
142,00 - 142,02	////	4	-4	-16	64
Ширина интервала: d = 0,02	Помоћна величина: a = 142,09 мм Σ	150	-	-23	-551

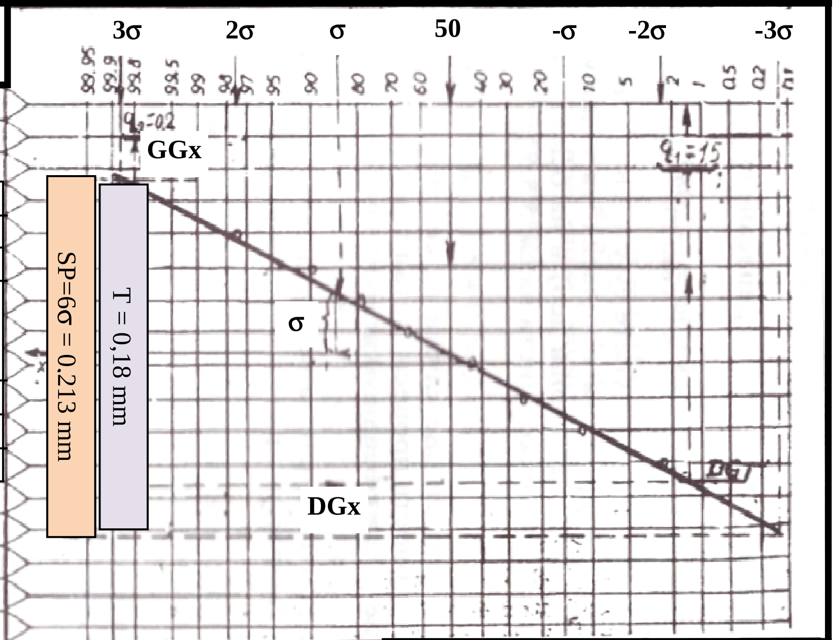
$\overline{x} = a+(d/n)(\Sigma b_{ix}f_i) =$ **142,087** mm	Интервал поверења: За $2\Phi(t)$= 99,73% $\overline{\mathbf{X}} = \overline{x} \pm t_p s\,/(n)^{0,5} =$ **$\overline{1}$42,087 ± 0,008 mm**
$\sigma = d[\ (1/n)(\Sigma\ b_i^2{}_x f_i) - (n^{-1}\Sigma\ b_{ix}f_i)^2]^{0,5} = 0,0382$ mm	
$s = \sigma\ [\ (n/n-1)]^{0,5} = 0,0383$ mm	
Способност процеса $6\sigma = 0,229$ mm	
Измерена карактеристика квалитета **X** = $\overline{x} \pm 3\sigma = 142,087 \pm 0,1145$ mm	

Напомене
Остале величине

Слика 3.6. Статистички лист за обраду резултата мерења карактеристике квалитета

Пословни систем:		ДИЈАГРАМ ВЕРОВАТНОЋЕ *Обрада резултата мерења*		Услови контроле:	
Део	Број	Карактеристика квалитета: $x = 142^{0,18}$ мм		Серија:	Налог:
Материјал	Стање				
Операција	Радник	Контролор:	Датум:	Напомене:	

Границе груп-ног инттервала	Маркирање апсол. фреквенција	f	Σf	F(x)
142,16-142,18	////	4	150	100,0
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ /	11	146	97,5
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	16	135	90,0
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	23	119	79,3
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	30	96	64,0
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	27	66	44,0
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	21	39	26,0
142,16-142,18	~~////~~ ~~////~~ ////	14	18	12,0
142,16-142,18	////	4	4	2,7



Σf = 150	**Тип дистри-буције: НОРМАЛАН**	$\overline{x}$ = 142,08 mm	σ = 0,036 mm	DGx = 141,969 mm GGx = 142,182 mm	**Способност процеса:** 6σ = GGx - DGx = 0,213 mm	

Слика 3.7. Дијаграм вероватноће за обраду резултата мерења карактеристике квалитета

1.5. Технолошка способност процеса (TS) уз поузданост од Pgs = 99,73% одређује се по обрасцу:

$SP = 6\sigma = 6 \times 0{,}0382 = 0{,}2292$ mm;

1.6. Природне толеранције дефинисане су релацијом:

$x = \bar{x} \pm 3\sigma = 142{,}087 \pm 0{,}1146$ mm

Све израчунате вредности унете су у трећи (доњи) део статистичког листа, а прва два дела су пре тога попуњена на основу информација о објекту и технологији контроле (горњи део) и на основу добијених резултата мерења (средњи део статистичкоg листа на слици 3.6.)

2. Дијаграм вероватноће служи да се графичким путем изврши комплетна анализа способности процеса. Детаљно о процедури конструисања дијаграма вероватноће може се наћи у литератури (Поповић. Б., 1987).

2.1. Графичко одређивање вредности параметара $\bar{x}$ и σ врши се после уцртавања Хенријеве праве и констатације да је емпиријски скуп нормалан.

Аритметичка средина се добија повлачењем праве из F(x) = 0,5 = 5O % до Хенријеве праве паралелно оси x. У пресеку се добија $\bar{x}$ = 142.08 mm.

Стандардна девијација се добија повлачењем правих из тачака 1σ и F(x)=5O% паралелно оси x до Хенријеве праве и износи σ = 0,036 mm.

2.2. Границе природне толеранције (границе sтатистичке толеранције или границе интервала поверења) добијају се повлачењем двеју правих (паралелно са арцисом) из ордината +3σ и -3σ до Хенријеве праве. Апцисе пресечених тачака дефинишу доњу:

$DG_x = 141{,}969$ mm

и горњу границу

$GG_x = 142{,}182$ mm (слика 3.7)

интервала поверења у којем се са вероватноћом од 99,73% налазе посматране карактеристике квалитета x.

2.3. Технолошка способност процеса биће;

$$SP = 6\sigma = GG_x - DG_x = 142{,}182 - 141{,}969 = 0{,}213 \text{ mm}$$

Упоређивањем SP = 6σ = 0,213 mm и T=O,18 mm види се да је вредност првог коефицијента тачности мања од допуштене тј.

$$\mu_1 = SP/T = T_p / T = 6\sigma / T = 0{,}213 / 0{,}18 = 1{,}18 > 1$$

што значи да строго гледано дати процес није тачан јер поуздапост од 99,73 доруштa свега 0,27% нетачно обрађених производа.

2.4. Измерена вредност дате карактеристике квалитета дата је изразом:

$$x = \bar{x} \pm 3\sigma = 142{,}08 \pm 3 \times 0{,}036 = 142{,}08 \pm 0{,}108\,mm$$

уз вероватноћу P_{gs} = 99,73%.

2.5. Проценат делова лошег квалитета (пошто је μ_1>1) одређује се повлачењем, поред поља T_p = SP = 6σ = 0,213 mm, и поља спецификације T=0,18 mm. Повлачењем са границе поља T линија паралелних са осом F(x) до Хенријеве праве, а затим из пресечних тачака паралелно са осом x до ординате добија се процентуални шкарт:

$$q = q_1 = q_2 = 1{,}5 + 0{,}2 = 1{,}7\%$$

јер је q_1 = 1,5%, а q_2 = 0,2%.

Ако се упореде резултати добијени рачунском и графичком методом може се закључити да постоје одређене разлике, које се са становишта праксе могу занемарити.

4. МЕТОДИ ПЛАНОВА ПРИЈЕМА

Методи планова пријема представљају одређени систем узорака чији је циљ да се процени један део производа ради прихватања или одбацивања читаве серије која или одговара или не одговара спецификацији квалитета. Планови пријема се праве за две варијанте, и то:

-при контролисању карактеристика квалитета, и

-при мерењу карактеристике квалитета .

Планови пријема обезбеђују информације о производу у узорку, односно информације о промењљивим у производном процесу. Модерни планови пријема су избегли могућност одбацивања добре серије (ризик произвођача), односно прихватања лоше партије (ризик потрошача).

У (Јуран, М.Ј, 1970) извршена је категоризација до сада објављених планова пријема помоћу једног, од неколико индекса квалитета:

1) *Ниво квалитета за пријем* (НКП), који представља најгори ниво квалитета који се ипак сматра задовољавајућим и он је вероватноћа П Р И Ј Е М А за једну серију (слика 4.1.) С обзиром да се НКП дефинише као "максимални проценат дефектних комада (или максимални број мана на сто комада" (Juran, M.J., 1970), та вредност треба да буде велика (слика 4.1.).

2) *Ниво квалитета за одбацивање* (НКО), који представља н е з а д о в о љ а в а ј у ћ и квалитет (неприхватљив ниво квлитета). НКО је, у суштини, ризик потрошача Пц и у неким табелама је стандардизован на вероватноћу од 0,1%. То значи да потрошач неће примити једну серију ако има 10 НКО дефектних комада. Са друге стране потрошач добија стварни квалитет серије, која је прихваћена са одређеном поузданошћу (вероватноћом).

3) *Ниво квалитета равнодушности* (НКР) који представња ниво квалитета који има вероватноћу прихватрања 0,5 за дати план узорковања (слика 4.1.).

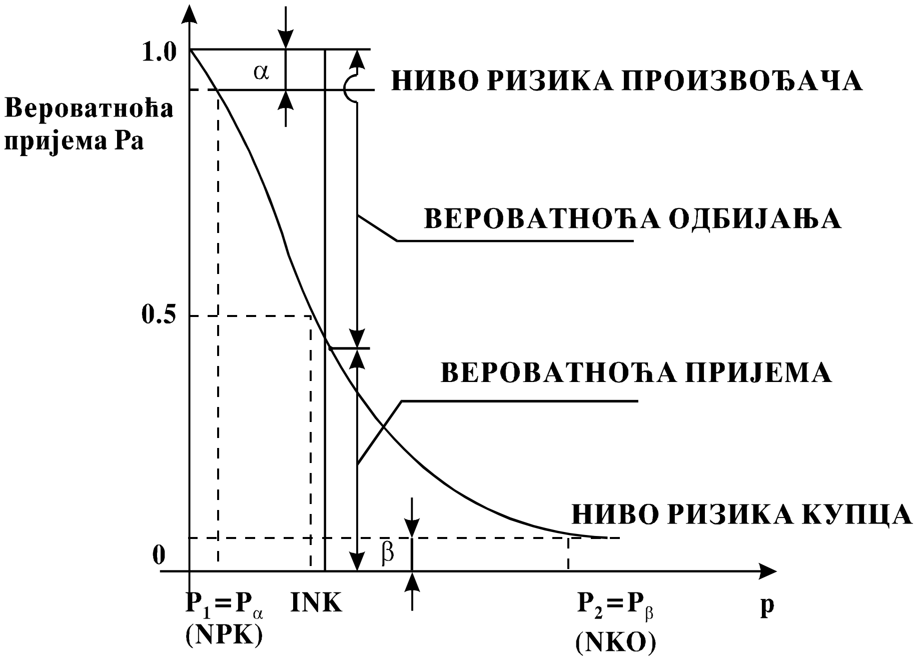
4) *Граница просечно одлазећег квалитета* (ГПОК), која представља тачку на којој ће % недостатака достићи максимум.

Ниједан план узорковања не треба прихватити а да се не види, прво, његова ОК крива.

Крива оперативних карактеристика (ОК крива) се може развити одређивањем неколико вредности улазног квалитета п. Вероватноћа пријема дефинисана је вероватноћом да број лоших комада у узорку буде једнак или мањи од броја за пријем по плану узорковања. У пракси се најчешће користе хипергеометријска, биномна и Поасонова расподела за проналажење вероватноће пријема (Бакија, И., 1979).

Важно је знати да узорци исте величине (рецимо 10%) од величине серије не пружају ни приближно исте ризике (види слику 4.2.). Анализирајмо како то изгледа за дефектност серије од 2%. За серију од N = 50 ком, вероватноћа пријема Pa = 90%; за N = 100 ком Pa = 81%, за N = 200 ком Pa = 67%, и за N=1000 ком Pa =

12%. Поред овог екстремног случаја у пракси се сусреће и други - деструктиван тест по ком је процедура: најпре се испита један комад и ако је он прихватљив прихвата се серија. Ако је први комад дефектан испитује се други случај, и уколико је он прихватљив, прихвата се и серија, а ако је дефектан серија се одбацује.



Слика 4.1. Индекси квалитета за планове пријема (узорковање)

При томе било да је улазни квалитет добар или лош - одлазећи квалитет ће настојати да буде веома добар.

4.1. ВРСТЕ ПЛАНОВА ПРИЈЕМА (УЗОРКОВАЊА)

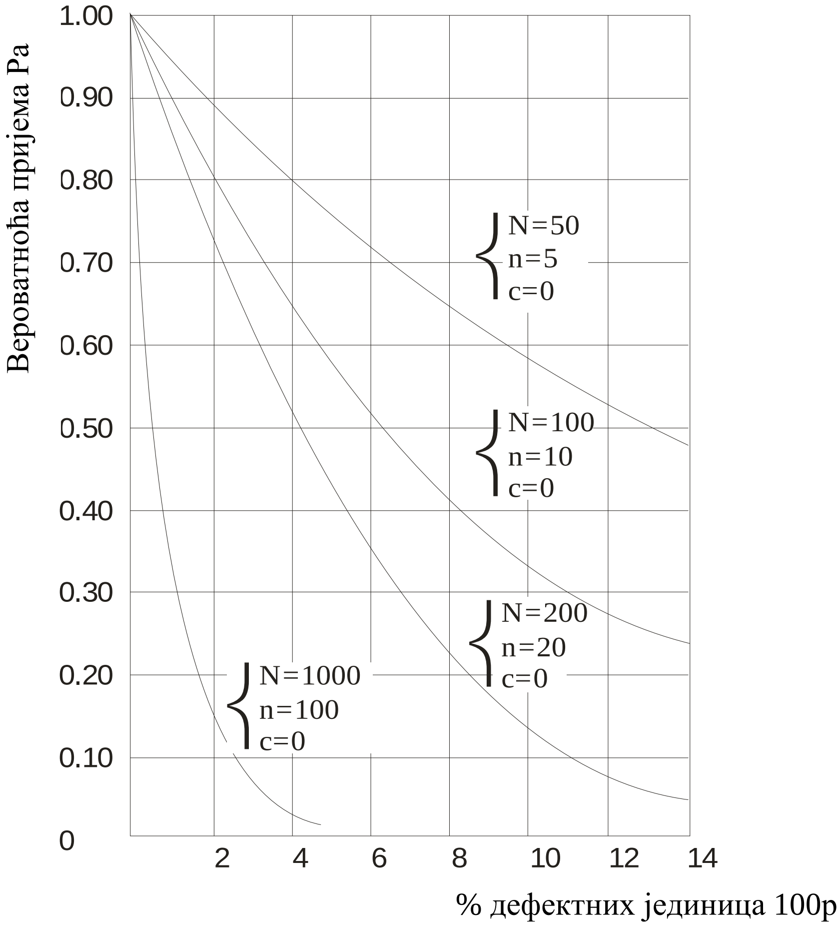
У литератури се обично говори о две врсте планова узорковања, заснованих на случајности узорка, и то:

а) планови за контролу карактертистика (атрибутивни), и

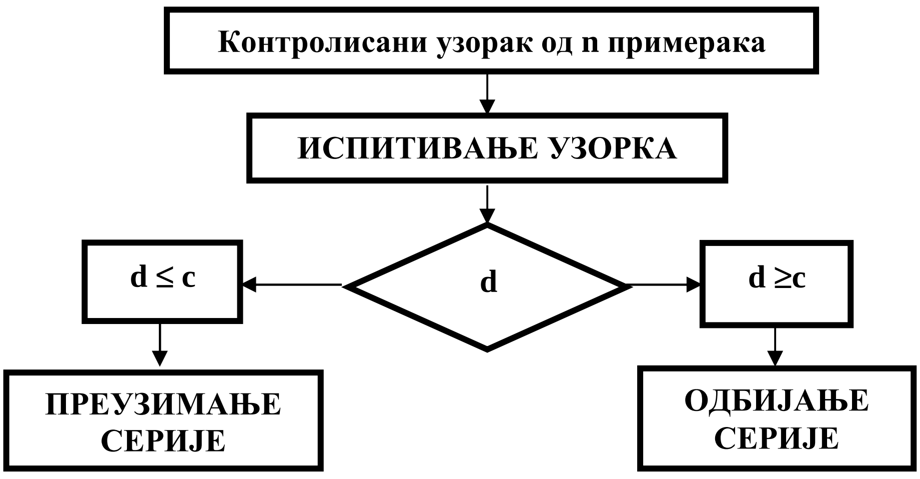
б) планови код којих се узима узорак и врши ***мерење*** карактеристике квалитета на сваком комаду. Добијени резултати се статистички обрађују и на основу добијених резултата доноси одлука о пријему или одбијању серије. Ови планови дају додатне информације у сваком узорку у поређењу са атрибутивним узорковањем. Такође, и мање су им величине узорка за исте ризике.

У пракси се примењују: ***просто, двоструко,*** и ***вишеструко узорковање.***

Код ***простог узорковања*** контролише се једна група узорака, извађена из серије, и на основу тога се прихвата или одбија читава серија (слика 4.3.).



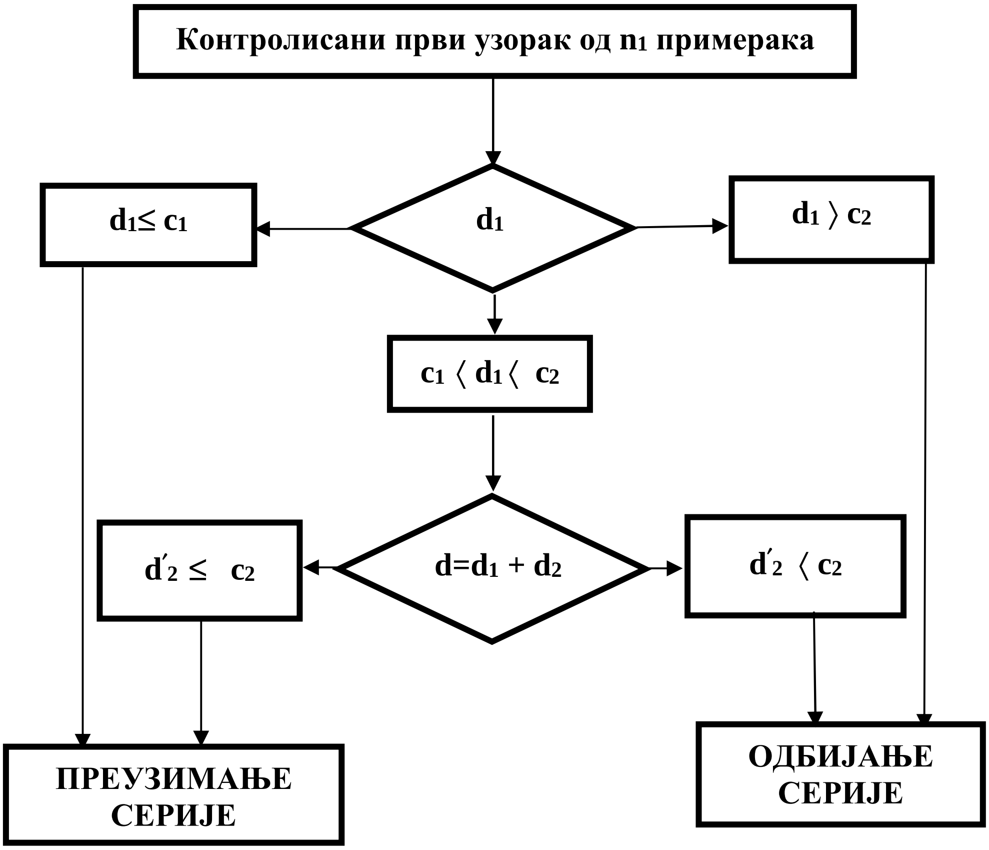
Слика 4.2. Упоређење ОК кривих за четири плана узорковања (Grant, E.L., 1964)



Слика 4.3. Приказ реализације простог узорковања (c-број дозвољених дефектних делова у узорку, d-број дефектних делова у узорку)

Код планова ***двоструког узорковања*** (слика 4.4.) најчешће се вади иницијални (мањи) узорак, и на основу њега доноси одлука о прихватању или одбијању серије. У случају да број недостатака буде или врло мали или довољно велики ($c_1 < d < c_2$) узима се други узорак (у граничним случајевима) и доноси се суд о прихватању или одбацивању серије.

Код ***вишеструких планова узорковања***, узима се један или два или неколико мањих узорака, повећавајући се по потреби све док се не донесе коначна одлука о прихватању или одбијању серије. Види се да двоструки и вишеструки планови узорковања, могу да значе мање провере, али по компликованијим процедурама.



Слика 4.4. Приказ реализације двоструког узорковања

Добар план узорковања на пријем треба да поседује:

1. Индекс (НКП, ГПОК итд.) употребљен да дефинише квалитет као заједничку потребу произвођача и корисника,

2. Ризике узорковања у квантитативном смислу (ОК крива), који штите потрошача од прихватања лоше серије, а произвођача од одбијања добрих серија,

3. Структуру, која ће довести до минимума укупних трошкова провере,

4. Флексибилност да би одразио промене величине партије, поднесеног квалитета производа или неког другог фактора,

5. Мерења неопходна за потпуну информацију за процену квалитета.

У свету се данас највише користе:

1. Додг-Ромингов систем планова пријема (Dodge I.,H., 1959),

2. Филипсов систем планова пријема (Bakija, I, 1979), и

3. Амерички војни стандард ABC-STD-105 D (интернационална ознака ABC-STD-105) (Military Standard, 1963, и Storn R., 1967).

На основу ABC-STD-105 усвојен је, код нас, ЈУС Н.НО.029, који је касније прихватила и Србија и тај ћемо метод овде детаљније приказати.

4.2. ПЛАНОВИ ПРИЈЕМА ПО СТАНДАРДУ ЈУС Н.НО.029

Планови пријема по ЈУС Н.НО.029 засновани су на прихватљивом нивоу квалитета - НКП (AQL - acceptable quality level), који одговара проценту дефектних делова $p_1 = p_\alpha$. Величина $p_1 = p_\alpha$ = AGL се дефинише као % дефектних делова. Серија квалитета 100 p_1/%/ = 100 AQL/%/ прихватају се у 100(1-α)/%/ случајева, а њихово одбијање је у 100 α/%/ случајева.

Ови планови штите произвођача од ***одбијања*** добрих серија. Делови се деле на серије доброг и серије лошег квалитета, а примењују се у свим фазама технолошког ланца производње, али и за контролу изолованих појединачних серија.

Формирање плана пријема по ЈУС Н.НО.029 зависи од: величине серија, контролисања према броју дефеката (мана) или броју дефектних делова, нивоа контроле (I, II и III ниво), врсте плана пријема (једноструки, двоструки, или вишеструки), начина контроле (нормални или редуковани), прихватљивог нивоа квалитета (PNK) и сукцесивности серија или изолованости серије која се контролише.

Систем планова се презентира у облику низа табела и скупа респективних кривих оперативних карактеристика. Тако за познату величину серије и ниво контролисања проналази се словна ознака из табеле 4.1. За познату словну ознаку, ниво квалитета за пријем (NKP) и врсту узорковања (табела 4.2. за просто узорковање, табела 4.3. за двоструке планове пријема и табела 4.4. за вишеструке планове пријема) добија се величина узорка.

Табела 4.1. Словне ознаке за величину узорка ***ABC-STD-105***

Величина серије или шарже /ком/	**Специјални нивои контролисања**				**Општи ниво контролисања**		
	C-1	**C-2**	**C-3**	**C-4**	**I**	**II**	**III**
2-8	А	А	А	А	А	А	Б
9-15	А	А	А	А	А	Б	Ц
16-25	А	А	Б	Б	Б	Ц	Д
26-50	А	Б	Б	Ц	Ц	Д	Е
51-90	Б	Б	Ц	Ц	Ц	Е	Ф
91-150	Б	Б	Ц	Д	Д	Ф	Г
151-280	Б	Ц	Д	Е	Е	Г	Х
281-500	Б	Ц	Д	Е	Ф	Х	Ј
501-1.200	Ц	Ц	Е	Ф	Г	Ј	К
1.201-3.200	Ц	Д	Е	Г	Х	К	Л
3.201-10.000	Ц	Д	Ф	Г	Ј	Л	М
10.001-35.000	Ц	Д	Ф	Х	К	М	Н
35.001-150.000	Д	Е	Г	Ј	Л	Н	П
150.001-500.000	Д	Е	Г	Ј	М	П	Q
500.001 и преко	Д	Е	Х	К	Н	Q	Р

У плановима пријема за нумеричке карактертистике квалитета врши се мерење карактеристике квалитета у узорку. На основу спроведених мерења израчунава се индекс (као што је аритметичка средина) и упоређује са дозвољеном вредношћу и доноси одлука о серији. Дозвољена вредност и величина узорка зависе од жељених ризика узорковања.

Табела 4.2. Главна табела за нормално контролисање (просто узорковање)
ABC-STD-105

Slovna oznaka veličine uzorka	Veličina uzorka	Prihvatljiv nivo kvaliteta (normalno kontrolisanje)																									
		0,010	0,015	0,025	0,010	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	11 15	21 22	30 31
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 6	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	123	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1250	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2000	↑	↑	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

↓ = Koristi se prvi plan uzimanja uzoraka ispod strelica. Ako je veličina uzorka jednaka veličini partije ili veća od nje, izvrši se stopostotna kontrola
↑ = Koristi se prvi plan uzimanja uzoraka iznad strelice
Ac = Broj za prihvatanje
Re = Broj za odbacivanje

NAPOMENA — Tačka ( ) u tabeli označava mesto decimalne zapete.

Табела 4.3. Главна табела за нормално контролисање (двоструко узорковање)

Slovna oznaka veličine uzorka	Uzorak	Veličina uzorka	Ukupna veličina uzorka	Prihvatljiv nivo kvaliteta (normalno kontrolisanje)																									
				0,010	0,015	0,025	0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R
A				⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	•	⇩	⇩	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B																	•	⇧		++	++	++	++	++	++	++	++	++	++
C																•	⇧	⇩	++	++	++	++	++	++	++	++	++	++	⇧
D	Prvi	2	2												•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	4 12	6 16	⇧	
	Drugi	2	4															# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	17 27		
	Treći	2	6															0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39		
	Četvrti	2	8															0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49		
	Peti	2	10															1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	53 58		
	Šesti	2	12															1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68		
	Sedmi	2	14															2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	53 54	77 78		
E	Prvi	3	3											•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	4 12	6 16	⇧		
	Drugi	3	6														# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	17 27			
	Treći	3	9														0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39			
	Četvrti	3	12														0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49			
	Peti	3	15														1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	53 58			
	Šesti	3	18														1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68			
	Sedmi	3	21														2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	53 54	77 78			
F	Prvi	5	5										•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	⇧	⇧	⇧			
	Drugi	5	10													# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14						
	Treći	5	15													0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19						
	Četvrti	5	20													0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25						
	Peti	5	25													1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29						
	Šesti	5	30													1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33						
	Sedmi	5	35													2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38						
G	Prvi	8	8									•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	⇧						
	Drugi	8	16												# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14							
	Treći	8	24												0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19							
	Četvrti	8	32												0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25							
	Peti	8	40												1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29							
	Šesti	8	48												1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33							
	Sedmi	8	56												2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38							
H	Prvi	13	13								•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	⇧							
	Drugi	13	26											# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14								
	Treći	13	39											0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19								
	Četvrti	13	52											0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25								
	Peti	13	65											1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29								
	Šesti	13	78											1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33								
	Sedmi	13	91											2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38								
J	Prvi	20	20							•	⇧	⇩	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	⇧								
	Drugi	20	40										# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14									
	Treći	20	60										0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19									
	Četvrti	20	80										0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25									
	Peti	20	100										1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29									
	Šesti	20	120										1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33									
	Sedmi	20	140										2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38									

⇩ = Koristiti prvi plan uzimanja uzoraka ispod strelice (preći na sledeću stranicu, gde je potrebno).
Ako je veličina uzoraka jednaka ili veća od veličine partije, izvršiti stopostotnu kontrolu.

⇧ = Koristiti prvi plan uzimanja uzoraka iznad strelice.

Ac = Broj za prihvatanje.

Re = Broj za odbijanje.

• = Koristiti odgovarajući plan jednostrukog uzimanja uzoraka (ili, gde je primenljivo, plan višestrukog uzimanja uzoraka).

++ = Koristiti plan dvostrukog uzimanja uzoraka (ili, gde je primenljivo, plan višestrukog uzimanja uzoraka).

= Nije dozvoljen prijem za ovu veličinu uzorka.

Napomena. — Tačka (.) u tabeli označava mesto decimalne zapete.

Табела 4.4. Главна табела за нормално контролисање (вишеструко узорковање)

Slovna oznaka veličine uzorka	Uzorak	Veličina uzorka	Ukupna veličina uzorka	Prihvatljiv nivo kvaliteta (normalno kontrolisanje)																									
				0,010	0,015	0,025	0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5	2,5	4,0	6,5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R	A R
A				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	++	++	++	++	++	++	++	++	++	++
C				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	++	++	++	++	++	++	++	++	++	++	↑
D	Prvi	2	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	4 12	6 16	↑	↑
	Drugi	2	4															# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	17 27		
	Treći	2	6															0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39		
	Četvrti	2	8															0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49		
	Peti	2	10															1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	53 58		
	Šesti	2	12															1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68		
	Sedmi	2	14															2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	53 54	77 78		
E	Prvi	3	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	4 12	6 16	↑	↑	↑
	Drugi	3	6														# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14	11 19	17 27			
	Treći	3	9														0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19	19 27	29 39			
	Četvrti	3	12														0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25	27 34	40 49			
	Peti	3	15														1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29	36 40	53 58			
	Šesti	3	18														1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33	45 47	65 68			
	Sedmi	3	21														2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38	53 54	77 78			
F	Prvi	5	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Drugi	5	10													# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14						
	Treći	5	15													0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19						
	Četvrti	5	20													0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25						
	Peti	5	25													1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29						
	Šesti	5	30													1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33						
	Sedmi	5	35													2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38						
G	Prvi	8	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Drugi	8	16												# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14							
	Treći	8	24												0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19							
	Četvrti	8	32												0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25							
	Peti	8	40												1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29							
	Šesti	8	48												1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33							
	Sedmi	8	56												2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38							
H	Prvi	13	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Drugi	13	26											# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14								
	Treći	13	39											0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19								
	Četvrti	13	52											0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25								
	Peti	13	65											1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29								
	Šesti	13	78											1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33								
	Sedmi	13	91											2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38								
J	Prvi	20	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 5	1 7	2 9	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
	Drugi	20	40										# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	3 8	4 10	7 14									
	Treći	20	60										0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	6 10	8 13	13 19									
	Četvrti	20	80										0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	8 13	12 17	19 25									
	Peti	20	100										1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	11 15	17 20	25 29									
	Šesti	20	120										1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	14 17	21 23	31 33									
	Sedmi	20	140										2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	18 19	25 26	37 38									

⇩ = Koristiti prvi plan uzimanja uzoraka ispod strelice (preći na sledeću stranicu, gde je potrebno).
Ako je veličina uzoraka jednaka ili veća od veličine partije, izvršiti stopostotnu kontrolu.

⇧ = Koristiti prvi plan uzimanja uzoraka iznad strelice.

Ac = Broj za prihvatanje.

Re = Broj za odbijanje.

• = Koristiti odgovarajući plan jednostrukog uzimanja uzoraka (ili, gde je primenljivo, plan višestrukog uzimanja uzoraka).

++ = Koristiti plan dvostrukog uzimanja uzoraka (ili, gde je primenljivo, plan višestrukog uzimanja uzoraka).

\# = Nije dozvoljen prijem za ovu veličinu uzorka.

Napomena. — Tačka (.) u tabeli označava mesto decimalne zapete.

Пример 4.1. Неко предузеће склопило је уговор за p_1 = 2,5% NKP. Делови се доносе у серијама од 3.500 комада. Потребно је направити једноструке планове пријема, за начиn контроле: нормалан и ниво контроле II.

Решење:

Из табеле 4.1. за серију од 3.500 комада и ниво контролисања II налази се словна ознака за величину узорка L.

Из табеле 4.2. за словну ознаку узорка L добија се величина узорка 200 примерака.

За NKP = 2,5% број за пријем је 10, а број за одбијање је 11. Значи да серија од 3.500 комада се може примити ако се пронађе десет или мање дефектних делова, али се мора одбити ако се пронађе 11 или више дефектних делова.

4.3. ПЛАНОВИ ПРИЈЕМА ЗА НУМЕРИЧКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ КВАЛИТЕТА

У пракси се сусреће више врста ових планова као што су: LOT-PLOT метод, MIL STD 414 и други.

Ми ћемо се овде детаљније позабавити стандардом MIL STD-414 који претпостављају нормалну расподелу, као и да је позната варијанса или да ће се добити из узорка.

План се одабира по процедури:

1. Избор нивоа квалитета за пријем (НКП), који се крећу у опсегу од 0,04 до 15%,

2. На основу величине серије и нивоа контролисања врши се избор словне ознаке величине узорка (табела 4.5.) ниво ИV се сматра нормалним и користи се ако се не назначи неко други од пет могућих.

3. Избор плана узорковања (табела 4.6.) у одељцима Б,Ц и Д. Одељци Б и Ц садрже планове за случајеве када је непозната варијација и када се она израчунава преко стандардне девијације или распона. Одељак Д садржи планове који се користе када је позната стандардна девијација.

Детаљније о плановима пријема може се наћи у литератури /18,19,32-34/.

Пример 4.2.: Максимални притисак пресовања хидрауличне пресе је специфициран као 98 kN. На контролу се поднесе серија од 30 комада. Користи се IV ниво контролисања са NKP = 1,5%. Стандардна девијација је непозната. Ако се претпостави да притисак следи нормалну расподелу потребно је одредити план узорковања за контролу серије.

Решење:

Процедура за одређивање овог плана узорковања дата је у одељку B MIL STD 414 и она захтева мерења па прорачун просечне стандардне девијације и да се изврши процена броја стандардних девијација између просека узорка и ограничења спецификације.

Табела 4.5. Главне ознаке за величину узорка

Величина серије	***Нивои контролисања***				
	I	***II***	***III***	***IV***	***V***
3-8	B	B	B	B	C
9-15	B	B	B	B	D
16-25	B	B	B	C	F
26-40	B	B	B	D	F
41-65	B	B	C	E	G
66-110	B	B	D	F	H
111-180	B	C	E	G	I
181-300	B	D	F	H	J
301-500	C	E	F	I	K
501-800	D	F	G	J	L
801-1.300	E	G	H	K	L
1.301-3.200	F	H	I	L	M
3.201-8.000	G	I	J	M	N
8.001-22.000	H	J	L	N	O
22.001-110.000	I	K	M	O	P
110.001-550.000	I	K	O	P	Q
550.001 и више	I	K	P	Q	Q

Напомена: Словне ознаке за величину узорка које су дате у табели су примењиве када се користе назначени нивои контролисања.

Табела 4.6. Главна табела за нормално и пооштрено контролисање за средства заснована на непознатом варијабилитету, метод стандардне девијације

Сл. озн	*Вел. узо-рка*	*0,04 k*	*0,065 k*	*0.10 k*	*0.15 k*	*0.25 k*	*0.40 k*	*0.65 k*	*1,00 k*	*1,50 k*	*2,50 k*	*4,00 k*	*6,50 k*	*10,00 k*	*15,00 k*
B	*3*										*1,12*	*0,958*	*0,765*	*0,566*	*0,341*
C	*4*								*1,45*	*1,34*	*1,17*	*1,01*	*0,814*	*0,617*	*0393*
D	*5*							*1,65*	*1,53*	*1,40*	*1,24*	*1,07*	*0,874*	*0,675*	*0,455*
E	*7*					*2,00*	*1,88*	*1,75*	*1,62*	*1,50*	*1,33*	*1,15*	*0,955*	*0,755*	*0,536*
F	*10*				*2,24*	*2,11*	*1,98*	*1,84*	*1,72*	*1,58*	*1,41*	*1,23*	*1,03*	*0,828*	*0,611*
G	*15*	*2,64*	*2,53*	*2,42*	*2,32*	*2,20*	*2,06*	*1,91*	*1,79*	*1,65*	*1,47*	*1,30*	*1,09*	*0,886*	*0,664*
H	*20*	*2,69*	*2,58*	*2,47*	*2,36*	*2,24*	*2,11*	*1,96*	*1,82*	*1,69*	*1,51*	*1,33*	*1,12*	*0,917*	*0,695*
I	*25*	*2,72*	*2,61*	*2,50*	*2,40*	*2,26*	*2,14*	*1,98*	*1,85*	*1,72*	*1,53*	*1,3*	*1,14*	*0,936*	*0,712*
J	*30*	*2,73*	*2,61*	*2,51*	*2,41*	*2,28*	*2,15*	*2,00*	*1,86*	*1,73*	*1,55*	*1,36*	*1,15*	*0,946*	*0,723*
K	*35*	*2,77*	*2,65*	*2,54*	*2,45*	*2,31*	*2,18*	*2,03*	*1,89*	*1,76*	*1,57*	*1,39*	*1,18*	*0,969*	*0,745*
L	*40*	*2,77*	*2,66*	*2,55*	*2,44*	*2,31*	*2,18*	*2,03*	*1,89*	*1,76*	*1,58*	*1,39*	*1,18*	*0,971*	*0,746*
L	*50*	*2,83*	*2,71*	*2,60*	*2,50*	*2,35*	*2,22*	*2,08*	*1,93*	*1,80*	*1,61*	*1,42*	*1,21*	*1,00*	*0,774*
M	*75*	*2,90*	*2,77*	*2,66*	*2,55*	*2,41*	*2,27*	*2,12*	*1,98*	*1,84*	*1,65*	*1,46*	*1,24*	*1,03*	*0,804*
N	*100*	*2,92*	*2,80*	*2,69*	*2,58*	*2,43*	*2,29*	*2,14*	*2,00*	*1,86*	*1,67*	*1,48*	*1,26*	*1,05*	*0,809*
O	*150*	*2,96*	*2,84*	*2,73*	*2,61*	*2,47*	*2,33*	*2,18*	*2,03*	*1,89*	*1,70*	*1,51*	*1,29*	*1,07*	*0,811*
P	*200*	*2,97*	*2,85*	*2,73*	*2,62*	*2,47*	*2,33*	*2,18*	*2,04*	*1,89*	*1,70*	*1,51*	*1,29*	*1,07*	*0,814*
Q		*0,065*	*0,10*	*0,15*	*0,25*	*0,40*	*0,65*	*1,00*	*1,50*	*2,50*	*4,00*	*6,50*	*10,00*	*15,00*	

Значи потребно је:

1. Израчунати аритметичку средину $\overline{X}$ и процену стандардне девијације за серију s, а затим вредности:

$(x_g - \overline{x})/s$ за горњу границу спецификације x_g, или
$(\overline{x} - x_d)/s$ за доњу границу спецификације x_d.

2. Ако је израчуната фракција једнака или већа од k, серија се прихвата. У супротном случају ако је израчуната фракција мања од k серија се одбацује.

Из табеле 4.5. за величину серије од 30 комада и IV ниво контролисања словна ознака узорка је D. Из табеле 4.6. (главна табела B.1. у MIL STD 414) добијају се вредности n = 5 и k = 1,40.

Нека су мерења била: 92 kN, 95 kN, 96 kN, 98 kN и 99 kN тада ће параметри узорка бити:

а) аритметичка средина: износи:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(92+95+96+98+99) = 96\ kN$$

b) стандардна девијација износи:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}(92-96)^2 + \ldots + (99-96)^2} = 2{,}45\ kN$$

Како је вредност $(x_g - \overline{x})/s$ = (98-96)/2,45 = 0,82 мања од k = 1,40 серија је одбачена. ОК крива за план је укључена у стандард.

5. МЕТОД КОНТРОЛНИХ КАРАТА

Метод контролних карата је ефикасна метода регулисања и управљања квалитетом израде производа и процеса у индустрији. Он се користи за: управљање квалитетом обрадних и технолошких процеса, контролом квалитета производа (у припреми, производњи и етапи завршетка производње), стабилизацију процеса откривањем и искључивањем из њега недозвољених фактора, анализу тачности и стабилности обрадних и технолошких процеса, анализу система грешака обраде, анализу система грешака мерења и контроле итд.

Процедура метода контролних карата детаљно је описана у ЈУС А.А0.020. Посебно треба истаћи неопходност одређивања статистичких мера, за које се користе:

1. Аритметичка средина $\bar{x}$ и стандардна девијација σ или аритметичка средина $\bar{x}$ и распон R.

2. Број d или проценат дефектних примерака у узорку p, и

3. Укупан број дефеката у узорку c или просечан број дефеката по једном примерку m.

За сваку од поменутих статистичких мера постоје и одговарајуће контролне карте ($\bar{x}$-карта, R-карта итд).

Подаци о измереним вредностима (x_i, R_i) или о броју дефектних примерака у узорку се уносе у контролну листу. Контролна листа садржи и следеће податке: назив производа, назив контролисане операције, назив јединице мерења, ознаку машине, име радника, име контролора, датум, редни број узорка, време узимања сваког узорка и његова величина и др.

Потребна израчунавања статистичких мера, које се користе, врше се увек у рубрикама специјално за то начињеним на самој контролној листи (види слику 5.1. у којој се као аритметичке мере користе аритметичка средина и распон).

Редни број узорка	1	2	3
Време узимања	6x15'	6x49'	7x12'
Појединачне вредности карактеристика	58	85	22
	41	63	89
	52	78	68
	93	38	53
Збир	244	264	232
Просечна вредност	61	66	58
Највећа вредност	93	85	89
Најмања вредност	41	38	22
Распон	52	47	67

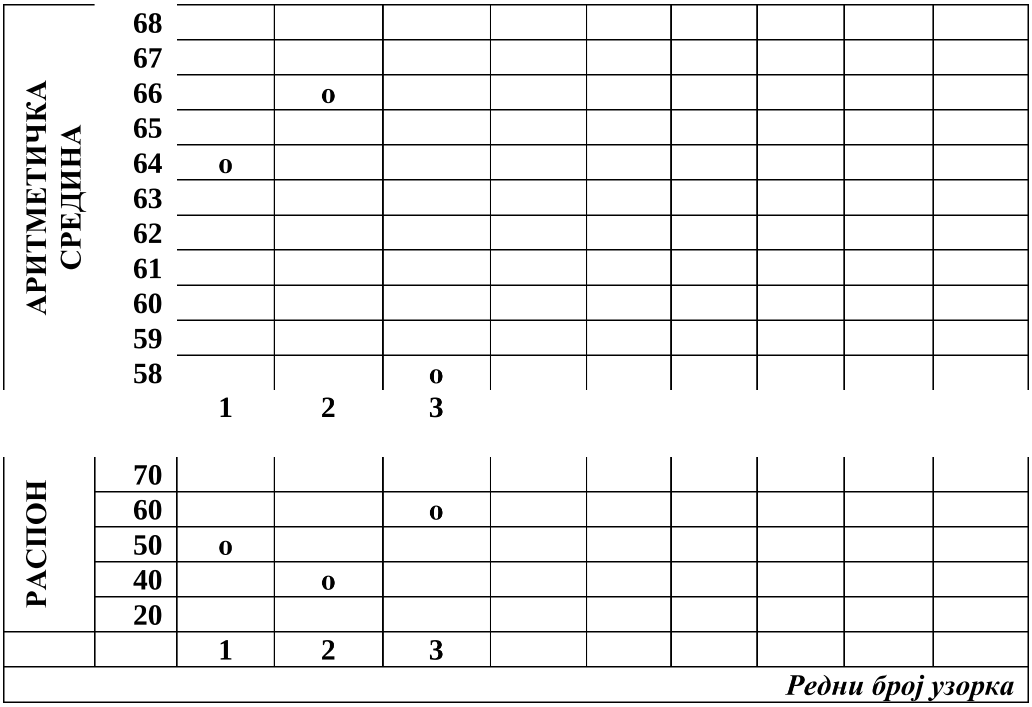
Слика 5.1. Извод из контроле листе

Контролна карта је значи графикон специјалне врсте и она је основни инструмент у статистичкој контроли стабилности производног процеса. У њој се приказују подаци о статистичким мерама испитиваних узорака.

Ако се карактеристика производа мери, водиће се обично две контролне карте, за $\bar{x}$ и R, или $\bar{x}$ и σ.

Међутим, ако се тада врши и преглед свих примерака и утврђује број дефектних, водиће се истовремено и контролна карта за p, односно m.

При изради контролних карти, на апцисној оси, на подједнаким растојањима величине 2 до 5 мм назначују се редни бројеви узорака, а на ординантну осу наноси се скала за одређену карактеристику узорака. Податак добијен на једноме узорку приказује се на контролној карти у виду једне тачке, кружића или крстића уочљиве величине, која се уцртава над редним бројем узорака на који се односи, а на висини која одговара вредности те статистичке мере, према одговарајућој скали која је дата на ординатној оси. На пример, подаци за прва три узорка према контролној листи наведеној у слици 5.1. приказани су у контролној карти као три тачке (слика 5.2.).



Слика 5.2. Приказивање података у контролним картама

Уколико се контролна карта користи у сврху контроле стабилности производног процеса током производње и ако су узорци исте величине, на контролну карту се унапред уцртавају још две хоризонталне праве, које се називају контролним границама (доњом и горњом).

Уколико су узорци различите величине, контролне границе ће бити степенасте, а не праве, линије и уцртаваће се у току испуњавања карте.

Ако се контролна карта користи у сврху анализе стабилности производног процеса, контролне границе, уцртаће се на карту пошто она буде испуњена. Контролне границе у том случају ће се уцртати на одговарајућше висине, зависно од података које ће контролна карта садржати. Контролне границе (границе карактеристике узорака), се значајно разликују од прописаних граничних вредности, (граница за карактеристику појединачног примерка производа из узорака, оне могу бити постављене независно од могућности производног процеса).

Контролне границе могу бити постављене независно од услова за квалитет производа.

Контролне карте се користе за:

1. - анализу стабилности производног процеса у протеклом периоду и у њу се уносе подаци добијени на основу испитивања најмање 25 узорака израђених у том периоду. На основу тих података израчунавају се контролне границе (ЈУС А.А2.021) и уносе на већ испуњену контролу карту. Узима се да је производни процес стабилан ако је испуњен један од следећих услова:

а) свих последњих двадесет пет тачака налази се у контролним границама,

б) од последњих тридесет пет тачака највише једна не лежи у контролним границама,

ц) од последњих сто тачака највише две не леже у контролним границама. Уколико се истовремено воде две контролне карте, на пример $\overline{x}$ и P, и ако само једна од њих открива нестабилност, производни процес се сматра нестабилним.

2. - контролу стабилности производног процеса током производње, чиме се благовремено открива место и тренутак у производном процесу где делују недозвољени фактори.

У том случају на контролну карту су претходно нанете контролне границе (ЈУС А.А2.022) и свака тачка која падне ван њих, означава да на процес делују недозвољени фактори и тај податак се упадљиво обележава. Одмах се у том случају предузимају акције - евентуално обуставља процес на тој машини, траже и откривју узроци нестабилности процеса, и одлучује шта ће се урадити са партијом производа из које је узет тај узорак. Када је узорак откривен и отклоњен, то треба назначити кратко у простору за примедбе на контролној карти, са напоменом о ком узорку се радило.

Променом услова производног процеса морају се ревидирати и контролне границе. Поновно израчунавање контролних граница (ревизију) на основу свежијих података треба вршити:

а) као рутински посао, у редовним временским размацима (на пример једном месечно или после наношења сваких сто или сваких педесет тачака на контролну карту);

б) после сваке веће промене у производном процесу.

5.1. КОНТРОЛА СТАБИЛНОСТИ ПРОИЗВОДНОГ ПРОЦЕСА ПО ИСТЕКУ ОДРЕЂЕНОГ ПЕРИОДА

Контрола стабилности производног процеса по истеку одређеног периода има за циљ да утврди деловање фактора који ремете једнообразност производа, а које је могућно и економски оправдано одстранити. Треба изабрати за то најмање 25 узорака од којих сваки, по правилу, треба да садржи исти број примерака. Обрада и анализа прикупљених података зависи:

1. од природе податка који се добија испитивањем примерака - да ли се мери извесна карактеристика на сваком примерку, или се за сваки примерак констатује да ли је или није дефектан, или се пак у обзир узима број дефеката уочених на примерку,

2. од тога, да ли су сви узорци исте величине или не, а у извесним случајевима и од величине узорка.

Обрада података зависи од тога да ли су узорци међусобно исте или различите величине (ЈУС А.А2.021).

У случају да су узорци исте величине, поступиће се на следећи начин:

а) Ако се карактеристика сваког примерка мери, а узорци не садрже више од десет примерака за сваки узорак израчунаће се два броја:

$\overline{x}_i$ = аритметичка средина вредности добијених мерењем свих примерака у узорку и

R_i = распон тих вредности.

На тај начин добиће се две серије бројева: прву серију образоваће аритметичке средине изабраних узорака, другу серију - распони тих узорака.

Израчунаће се затим, аритметичка средина прве серије, која се означава са $\overline{x}$ и аритметичка средина друге серије, која се означава са $\overline{R}$.

б) Ако се карактеристика сваког примерка мери, а узорци садрже више од десет примерака сваки, на основу података добијених мерењем израчунаће се - за сваки узорак посебно - два броја:

$\overline{x}_i$ = аритметичка средина вредности добијених мерењем свих примерака у узорку и

σ_i= стандардна девијација тих вредности.

На тај начин добиће се две серије бројева: прву серију образоваће аритметичке средине изабраних узорака, а другу серију - стандардне девијације тих узорака.

Израчунаће се затим аритметичка средина прве серије, која се означава са $\overline{x}$ и аритметичка средина друге серије, која се означава са $\overline{\sigma}$.

ц) Ако се за сваки примерак производа утврђује само да ли је дефектан или није, на основу података добијених испитивањем свих примерака из свих узорака израчунаће се просечни број дефектних примерака по узорку који се означава са m. По дефиницији:

$$m = \frac{број \quad дефектних \quad примерака \quad у \quad свим \quad узорцима}{број \quad прегледаних \quad узорака}$$

д) Ако се за сваки примерак производа утврђује број на њему уочених дефеката, на основу података добивених испитивањем свих примерака из свих узорака израчунаће се просечни број дефеката по узорку који се означава $\overline{c}$. По дефиницији:

$$\overline{c} = \frac{број \quad дефеката \quad у \quad свим \quad узорцима}{број \quad прегледаних \quad узорака}$$

У случају да су узорци различите величине, поступиће се на следећи начин:

а) Ако се карактеристика производа мери, и ако узорци садрже претежно мањи број примерака (не више од десет), за сваки узорак израчунаће се два броја:

$\overline{x}_и$ = аритметичка средина вредности добијених мерењем на свим примерцима у узорку, и

P_1 = распон тих вредности.

На тај начин добиће се три серије бројева: $\bar{x}_1, \bar{x}_2 ....., \bar{x}_s$ представљаће аритметичке средине првог, другог,...,s-тог узорка; P_1, P_2,...P_s - распоне првог, другог,... s-тог узорка; и n_1,n_2,...,n_s величине првог, другог,...,s-тог узорка.

Тада ће се израчунати следеће две вредности:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_s\bar{x}_s}{n_1 + n_2 + ... + n_s} = \frac{\sum_{i-1}^{s} n_i\bar{x}_i}{\sum_{i-1}^{s} n_i}$$

$$\sigma_0 = \frac{\frac{n_1R_1}{d_2(n_1)} + \frac{n_2R_2}{d_2(n_2)} + ... + \frac{n_sR_s}{d_2(n_s)}}{n_1 + n_2 + ... + n_s} = \frac{\sum_{i-1}^{s} \frac{n_iR_i}{d_2(n_i)}}{\sum_{i-1}^{s} n_1}$$

Вредности $d_2(n_1)$, $d_2(n_2)$,..., $d_2(n_s)$ прочитаће се из табеле 5.2. На пример, ако је први узорак садржао седам примерака, а други девет, биће $d_2(n_1) = d_2(7) = 2,704$, а $d_2(n_2) = d_2(9) = 2,970$.

Најзад, израчунаће се за сваки узорак одговарајућа вредност:

$$\overline{R}(n_i) = d_2(n_i)\sigma_0$$

На тај начин добиће се низ вредности $\overline{R}(n_i), \overline{R}(n_2), ... \overline{R}(n_s)$.

б) Ако се карактеристика производа мери, а узорци претежно садрже више од десет примерака, за сваки узорак израчунаће се два броја:

$\bar{x}_и$ = аритмеричка средина вредности добијених мерењем свих примерака у узорку и

σ_i= стандардна девијација тих вредности; на тај начин добиће се три серије бројева: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$,..... $\bar{x}_s$- аритметичке средине прегледаних узорака, $\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_s$ - стандардне девијације тих узорака, n_1, n_2,...,n_m - величине узорака.

Из тих серија израчунаће се општа просечна вредност:

$$x = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ... + n_s\bar{x}_s}{n_1 + n_2 + ... n_s} = \frac{\sum_{i-1}^{s} n_1\bar{x}_1}{\sum_{i-1}^{s} n_1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\frac{n_1}{c_2(n_1)}\sigma_1 + \frac{n_2}{c_2(n_2)}\sigma_2 + ... + \frac{n_s}{c_2(n_s)}\sigma_s}{n_1 + n_2 + ... + n_s} = \frac{\sum_{i-1}^{s} \frac{n_i}{c_2(n_i)}}{\sum_{i-1}^{s} n_i}$$

Вредности $c_2(n_1)$, $c_2(n_2)$,...$c_2(n_s)$ прочитаће се из таб.5.5.3. На пример, ако је први узорак садржао двадесет примерака, а други 9 примерака, биће $c_2(n_1)=c_2(20) = 0{,}9619$, а $c_2(n_2) = c_2(9) = 0{,}9139$.

Најзад, за свако н које се појављује као величина неког прегледаног узорка израчунаће се величина

$$\sigma(n_1)=c_2(n_1)\sigma_e$$

На тај начин добиће се низ вредности $\sigma(n_1), \sigma(n_2), \ldots \sigma(n_s)$.

Н а п о м е н а. - У случају да сваки узорак садржи више од 25 примерака, рачун ће се упростити, јер ће у том случају бити $c_2(n_1) = c_2(n_2) = \ldots = c_2(n_s) = 1$, па је за све величине узорка $\sigma(n) = \sigma_e$

ц) Ако се за сваки примерак узорка утврђује да ли је дефектан или није, на основу података добијених испитивањем свих примерака у свим узорцима израчунаће се проценат дефектних примерака међу свим прегледаним примерцима. Тај проценат означава се са $\overline{p}$. Он се дефинише помоћу:

$$\overline{p} = 100 \cdot \frac{укупан \quad број \quad дефектних \quad примерака \quad у \quad свим \quad узорцима}{укупан \quad број \quad примерака \quad у \quad свим \quad узорцима}$$

д) Ако се за сваки примерак производа утврђује број на њему уочених дефеката, израчунаће се на основу података добијених испитивањем свих примерака у свим узорцима, просечап број дефеката по примерку, који се означава са $\overline{u}$. Он се дефинише помоћу:

$$\overline{u} = \frac{укупан \; број \; дефеката \quad у \quad свим \quad узорцима}{укупан \; број \quad примерака \quad у \quad свим \quad узорцима}$$

5.1.1. Централна линија и контролне границе

Централна линија представља ону вредност око које се очекује да ће се груписати бројчани подаци добијени на појединим узорцима. Са друге стране доња и горња контролна граница одређују да ли је производни процес стабилан или не, мерено преко броја узорака у једној већој серији узорака, окарактерисаних вредностима које падају ван контролних граница.

Прорачун централних линија и контролних граница, сагласпо ЈУС А.А2.021, врши се по обрасцима датим у табеле 5.1. зависно да ли су узорци исте или различите величине.

Табела 5.1.Израчунавање положаја централне линије и контролних граница при контроли стабилности производног процеса по истеку одређеног периода

	Карактеристика производа	Централна вредност	Доња контролна граница	Горња контролна граница	Примедба
Случај када су узорци исте величине	***Аритметичка средина***	$\bar{x}$	$\bar{x} - A_2(n) \cdot \bar{P}$	$\bar{x} + A_2(n) \cdot \bar{P}$	*За мале узорке са мање од 10 примерака*
	Распон	$\bar{P}$	$D_3(n) \cdot \bar{P}$	$D_4(n) \cdot \bar{P}$	
	Аритметичка средина	$\bar{x}$	$\bar{x} - A_1(n) \cdot \bar{\sigma}$	$\bar{x} + A_1(n) \cdot \bar{\sigma}$	*За узорке са више од 10 примерака*
	Стандардна девијација	$\bar{\sigma}$	$D_3(n) \cdot \bar{\sigma}$	$D_3(n) \cdot \bar{\sigma}$	
	Просечни број дефектних примерака по узорку	$\bar{m}$	$\bar{m} - 3[m(1-m/n)]^{0,5}$	$\bar{m} + 3[m(1-m/n)]^{0,5}$	
	Укупан број дефеката по узорку	$\bar{c}$	$\bar{c} - 3(c)^{0,5}$	$\bar{c} + 3(c)^{0,5}$	
Случај када су узорци различите величине	***Аритметичка средина***	$\bar{x}$	$\bar{x} - A_2(n_и) \cdot P(n_и)$	$\bar{x} + A_2(n_и) \cdot P(n_и)$	*За мале узорке са мање од 10 примерака*
	Распон	$P(n_и)$	$D_3(n_и) \cdot P(n_и)$	$D_4(n_и) \cdot P(n_и)$	
	Аритметичка средина	$\bar{x}$	$\bar{x} - A_1(n) \cdot \sigma(n)$	$\bar{x} + A_1(n) \cdot \sigma(n)$	*За узорке са више од 10 примерака*
	Стандардна девијација	$\sigma(n)$	$V_3 \sigma(n)$	$V_4 \sigma(n)$	
	% дефектних примерака у узорку	$\bar{p}$	$\bar{p} - 3 \cdot [\bar{p}(100-\bar{p})/n]^{0,5}$	$\bar{p} + 3 \cdot [\bar{p}(100-\bar{p})/n]^{0,5}$	
	Број дефеката по једном примерку у узорку	$\bar{y}$	$\bar{y} - 3 \cdot (\bar{У}/n)^{0,5}$	$\bar{y} + 3 \cdot (\bar{У}/n)^{0,5}$	

Напомена: Вредности фактора $A_2(n)$, $D_3(n)$, $D_4(n)$, $A_2(n_i)$, $D_3(n_i)$, $D_4(n_i)$,$A_1(n)$, $B_3(n)$, $B_4(n)$, $A_1(n_i)$, B_3, и B_4 дати су у табели 5.2.

Табела 5.2. Фактори за централне линије и контролне границе за протеклу производњу

Величина узорка **n**	A_1	A_2	B_3	B_4	D_3	D_4	d_2	c_2
2	3,760	1,880	0	3,267	0	3,267	1,128	0,5642
3	2,394	1,023	0	2,568	0	2,575	1,693	0,7236
4	1,880	0,729	0	2,266	0	2,282	2,059	0,7939
5	1,596	0,577	0	2,089	0	2,115	2,326	0,8407
6	1,410	0,483	0,030	1,970	0	2,004	2,534	0,8686
7	1,277	0,419	0,118	1,882	0,076	1,924	2,704	0,8882
8	1,175	0,371	0,185	1,815	0,136	1,864	2,847	0,9027
9	1,094	0,337	0,239	1,761	0,184	1,816	2,970	0,9139
10	1,028	0,308	0,284	1,716	0,223	1,777	3,078	0,9227
11	0,973	0,285	0,321	1,679	0,256	1,744	3,173	0,9300
12	0,925	0,266	0,354	1,646	0,284	1,716	3,258	0,9359
13	0,884	0,249	0,382	1,618	0,308	1,692	3,336	0,9410
14	0,848	0,235	0,406	1,594	0,329	1,671	3,407	0,9453
15	0,816	0,223	0,428	1,572	0,348	1,652	3,472	0,9490
16	0,788	0,212	0,448	1,552	0,364	1,636	3,532	0,9523
17	0,762	0,203	0,466	1,534	0,379	1,621	3,588	0,9551
18	0,738	0,194	0,482	1,518	0,392	1,608	3,640	0,9576
19	0,717	0,187	0,497	1,503	0,404	1,596	3,689	0,9599
20	0,697	0,180	0,510	1,490	0,414	1,586	3,735	0,9619
21	0,679	0,173	0,523	1,477	0,425	1,575	3,778	0,9638
22	0,662	0,167	0,534	1,466	0,434	1,566	3,819	0,9655
23	0,647	0,162	0,545	1,455	0,443	1,557	3,858	0,9670
24	0,632	0,157	0,555	1,445	0,452	1,548	3,895	0,9684
25	0,619	0,153	0,565	1,435	0,459	1,541	3,931	0,9696
Преко **25**		$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$1 - 3/2n$	$1 + 3/\sqrt{2n}$				1

5.1.2. Оцена стабилности производног процеса

За оцену стабилности производног процеса у протеклом периоду, као што смо рекли, користе се контролне карте у које су уцртане централне вредности и контролне границе. Према броју тачака које падају ван контролних граница закључује се да ли је производни процес у посматрапом периоду био стабилан или не. Практично правило је да се процес сматра стабилним ако се свих последњих двадесет пет тачака налазе у појасу између контролних граница, или ако се од последњих тридесет пет тачака највише једна налази ван контролних граница, или пак, ако се од последњих сто тачака највише две налазе ван контролних граница. Поред откривања нестабилности процеса у случају кад нису задовољени наведени услови, контролна карта омогућује да се открије нестабилност процеса ако се уочи тренд нагомилавања тачака у близини једне или обеју контролних граница, или, на пример, тенденција сталног пораста. Ако је потребпо може се применити и општији критеријум.

Уколико се врши мерење карактеристике производа, обично се користе обе контролне карте: једна за аритметичку средину, друга за распон или стандардпу девијацију. Ако било која од њих показује појаве наведене у претходпом пасусу, процес се мора сматрати нестабилним.

5.2. КОНТРОЛА СТАБИЛНОСТИ ПРОИЗВОДНОГ ПРОЦЕСА У ТОКУ ПРОИЗВОДЊЕ

Контрола стабилности производног процеса у току производње има за циљ да се благовремепо открију места, операције и тренутак кад на производни процес делују фактори који ремете једнообразпост производа, а које је могућпо и економски оправдано одстранити. Приступајући овој Контроли прво треба одлучити у односу на које карактеристике производа ће се вршити Контрола стабилности, које ће се операције Контролисати, које ће се статистичке мере користити, када ће се бирати узорци, које ће величине бити узорци итд.

Контролне границе утврђују се на следећи начин:

1.прикупљање и анализа извесног броја података (за најмање 25 узорака),

2.на основу резултата добијених анализом прикупљених података утврђује се која ће се бројчана вредност изабране статистичке мере сматрати репрезентативпом за производни процес,

3.на бази утврђене репрезентативне вредности и на основу захтева постављених спецификацијом производа, усваја се стандардна вредност за статистичку меру која се користи, и

4.на основу усвојене стандардне вредности и на основу одговарајућих формула израчунавају се контролне границе.

Статистичка мера се претходпо изабира (да ли аритметичка средина и стандардна девијација, или број дефектних примерака, или проценат дефектних примерака итд). На основу претходних података израчунава се *репрезентативна* вредност извесне карактеристике производа као њена средња вредност. Услов за то је да су у посматрапом периоду услови производње били пормални.

Стандардне вредности ($\bar{x}', \bar{\sigma}'$, p', c') нису прописане спецификацијом, већ усвојене вредности за прорачуп контролних граница. Оне се бирају зависпо од репрезентативне вредности, захтева спецификације постављених у односу на квалитет производа. Стандардне вредности се мењају, ако се покаже у току рада то као неопходпо и њихов избор је свакако основни проблем при постављању ове врсте контроле. При овом избору морају се узети у обзир трошкови производње и могућпости производног процеса.

Уколико се мери карактеристика сваког примерка производа потребне су две репрезентативне вредности, и исто тако две стандардне вредности за аритметичку средину и за стандардпу девијацију (оне ће се увек користити, без обзира да ли ће се контрола вршити помоћу аритметичке средине и стандардне девијације, или аритметичке средине и распона).

Проценат дефектних примерака биће репрезентативна и стандардна вредност уколико се за сваки примерак производа утврђује да ли је дефектан или није. Слично, број дефеката по једном примерку производа биће стандардна и репрезентативна вредност уколико се за сваки примерак производа констатује број на њему уочених дефеката.

Израчунавање репрезентативне вредности зависи пре свега да ли је анализа претходпо добијених података (спроведена сагласпо ЈУС А.А2.021) показала да је процес био стабилан или не. Тако ако се као статистичка мера користи аритметичка средина $\bar{x}$, и ако је процес стабилан, као репрезентативна вредност усвојиће се $\bar{x}$. Исто тако, усвојиће се као репрезентативна вредност проценат дефектних примерака п, ако се као мера користи број дефектних примерака у узорку м, и ако је процес био стабилан.

За стандардпу девијацију усвојиће се као репрезентативна вредност:

$\overline{R}/d_2(n)$ ***- ако су коришћени узорци исте величине n < 10,***

$\overline{\sigma}/c_2(n)$ ***- ако су коришћени узорци исте величине n > 10,***

σ_e ***- у случају да су коришћени узорци различите величине.***

За случај да је производни процес био нестабилан, треба покушати да се утврде технички разлози који су до тога довели. Ако се утврди да су неки поремећаји у производњи или начину испитивања производа изазвали ненормалне услове и довели до тога да су извесне тачке пале ван контролних граница, треба одбацити податке који одговарју тим тачкама.Такође, уколико се утврди да је у току периода на који се односе прикупљени подаци измењен производни процес и то тако да се с правом очекује и измена у просечној вредности мерене карактеристике производа или до измене у проценту дефектних примерака, у том случају треба одбацити податке који се односе на период пре те измене у производном процесу. Ако се тако извесни подаци одбаце, треба поново извршити обраду само преосталих података.Тиме ће се доћи до нових кориговањих вредности за $\bar{x}$, односно Р, р, итд. На бази тако ревидираних вредности усвојиће се репрезентативне вредности за производни процес. Међутим, уколико није утврђена никаква основа по којој би требало извесне податке одбацити, за репрезентативне вредности треба усвојити вредности добијене обрадом свих података.

Треба нагласити да се одбацивање података не сме, ни у ком случају, вршити на бази статистичких, већ искључиво на основу техничких разлога. Значи податак се одбацује зато што је ипжењеру познато да је узорак на који се податак односи произведен при одређеним условима који нису репрезентативни за производни процес, а не зато што је њему одговарајућа тачка пала ван контролних граница на контролној карти.

Репрезентативне вредности се упоређују са захтевима спецификације у следећим случајевима:

1)када се за појединачни примерак производа утврђује да ли је дефектан или не с обзиром на захтеве који се постављају на квалитет производа,

2) кад се за појединачни примерак производа утврђује број на њему уочених дефеката и упоређује са захтевима који се постављају у односу на квалитет производа, и

3) када се мери карактеристика производа сматраће се да репрезентативне вредности одговарају захтевима који се постављају у односу на квалитет производа, ако се интервал $\bar{x}_r - 3\sigma_r$ до $\bar{x}_r + 3\sigma_r$ налази у границма спецификације.

Усвајање стандардних вредности зависи од тога да ли је репрезентативна вредност производног процеса:

1- у складу са захтевима спецификације и у том случају за стандардне вредности усвојиће се одговарајуће репрезентативне вредности (стандардна вредност за аритметичку средину $\overline{x}$ биће једнака репрезентативпој вредности за аритметичку средину $\overline{x}_r$, $\sigma = \sigma_r$, $c' = c_r$),

2- није у складу са захтевима спецификације, а израчуната је на основу великог броја података и ти подаци показују да је производни процес стабилан, и у том случају да би се смањио проценат дефектних примерака производа постоје само две могућности: или изменити границе спецификације, или извршити суштинску измену процеса,

3- није у складу са захтевима спецификације, а израчуната је на основу мањег броја података или на основу података који показују да производни процес није стабилан, и у том случају се не може бити сигурап у добијену репрезентативпу вредност те треба - уколико је број података на основу којих је израчуната репрезентативна вредност мали - наставити прикупљање података, и - ако је производни процес нестабилан - стабилизовати га.

За оцену стабилности производног процеса у току производње, такође се користе контролне карте, сагласпо ЈУС А.А2.022, у које су уцртане централне вредности и контролне границе (види табелу 5.3.).

Табела 5.3. Израчунавање положаја централне линије и контролних граница при контроли стабилности производног процеса у току производње

Стандардна вредност	Централна вредност	Доња контролна граница	Горња контролна граница
Аритметичка средина	$=\overline{x}'$	$=\overline{x}'-A(n)\sigma'$	$=\overline{x}+A(n)\sigma'$
Распон	$R'(n) = d_2(n)\sigma$	$=D_1(n)\sigma$©	$=D_2(n)\sigma$©
Стандардна девијација	$=c_2(n)\sigma'$	$=B_1(n)\sigma$©	$=B_2(n)\sigma'$
Број дефектних примерака у узорку	$=m'$	$=m'-3\sqrt{m'\left(1-\frac{m'}{n}\right)}$	$=m'+3\sqrt{m'\left(1-\frac{m'}{n}\right)}$
Проценат дефектних примерака у узорку	$=p'$	$=p'-3\sqrt{\left(\frac{p'(100-p')}{n}\right)}$	$=p'+3\sqrt{\left(\frac{p'(100-p')}{n}\right)}$
Број дефеката по једном примерку	$=u'$	$=u'-3\sqrt{\frac{u'}{n}}$	$=u'+3\sqrt{\frac{u'}{n}}$
Укупап број дефеката у узорку	$=u'n$	$=u'n-3\sqrt{u'n}$	$=u'n+3\sqrt{u'n}$

Напомена: Фактори A(n), $d_2(n)$, $D_1(n)$, $D_2(n)$, $c_2(n)$, $B_1(n)$, и $B_2(n)$ за разне величине n узорка дати су у табели 5.4.

Табела 5.4. Фактори за централне линије и контролне границе за текућу производњу

Величина узорка **n**	***A***	***B₁***	***B₂***	**D₁**	**D₂**	***c₂***	***1/c₂***	**d₂**	**1/d₂**
2	***2,121***	***0***	***1,843***	**0**	**3.686**	***0,5642***	***1,7725***	**1.128**	**0.8865**
3	***1,732***	***0***	***1,858***	**0**	**4.358**	***0,7236***	***1,3820***	**1.693**	**0.5907**
4	***1,500***	***0***	***1,808***	**0**	**4.698**	***0,7979***	***1,2533***	**2.059**	**0.4857**
5	***1,342***	***0***	***1,756***	**0**	**4.918**	***0,8407***	***1,1894***	**2.326**	**0.4299**
6	***1,225***	***0,026***	***1,711***	**0**	**5.078**	***0,8686***	***1,1512***	**2.534**	**0.3946**
7	***1,134***	***0,105***	***1,672***	**0.205**	**5.203**	***0,8882***	***1,1259***	**2.704**	**0.3698**
8	***1,061***	***0,167***	***1,638***	**0.387**	**5.307**	***0,9027***	***1,1078***	**2.847**	**0.3512**
9	***1,000***	***0,219***	***1,609***	**0.546**	**5.394**	***0,9139***	***1,0942***	**2.970**	**0.3367**
10	***0,949***	***0,262***	***1,584***	**0.687**	**5.469**	***0,9227***	***1,0837***	**3.078**	**0.3249**
11	***0,905***	***0,299***	***1,561***	**0.812**	**5.534**	***0,9300***	***1,0753***	**3.173**	**0.3152**
12	***0,866***	***0,331***	***1,541***	**0.924**	**5.592**	***0,9359***	***1,0684***	**3.258**	**0.3069**
13	***0,832***	***0,359***	***1,523***	**1.026**	**5.646**	***0,9410***	***1,0627***	**3.336**	**0.2998**
14	***0,802***	***0,384***	***1,507***	**1.121**	**5.693**	***0,9452***	***1,0579***	**3.407**	**0.2935**
15	***0,775***	***0,406***	***1,207***	**1.207**	**5.737**	***0,9490***	***1,0537***	**3.472**	**0.2880**
16	***0,750***	***0,427***	***1,285***	**1.285**	**5.779**	***0,9523***	***1,0501***	**3.532**	**0.2831**
17	***0,728***	***0,445***	***1,465***	**1.359**	**5.817**	***0,9551***	***1,0470***	**3.588**	**0.2787**
18	***0,707***	***0,461***	***1,454***	**1.426**	**5.854**	***0,9576***	***1,0442***	**3.640**	**0.2747**
19	***0,688***	***0,477***	***1,443***	**1.490**	**5.888**	***0,9599***	***1,0418***	**3.689**	**0.2711**
20	***0,671***	***0,491***	***1,433***	**1.548**	**5.922**	***0,9619***	***1,0396***	**3.735**	**0.2677**
21	***0,655***	***0,504***	***1,424***	**1.606**	**5.950**	***0,9638***	***1,0376***	**3.778**	**0.2647**
22	***0,640***	***0,516***	***0,415***	**1.659**	**5.979**	***0,9655***	***1,0358***	**3.819**	**0.2618**
23	***0,626***	***0,527***	***1,407***	**1.710**	**6.006**	***0,9670***	***1,0342***	**3.858**	**0.2592**
24	***0,612***	***0,538***	***1,399***	**1.759**	**6.031**	***0,9584***	***1,0327***	**3.895**	**0.2567**
25	***0,600***	***0,548***	***1,392***	**1.804**	**6.058**	***0,9696***	***1,0313***	**3.931**	**0.2544**

Податак добијен испитивањем примерака једног узорка упоси се на контролну карту видљиво уцртаном тачком чија апсциса показује редни број узорка, а ордината нађену аритметичку средину, односно распон, односно % дефектних примерака, итд. Уколико унета тачка падне ван контролних граница, радпо место са кога је узет узорак на који се односи унети податак, обележиће се нарочитом ознаком. Одговорпо лице на тај знак треба одмах да предузме акцију - да евентуалпо обустави процес на машини, тражи узрок који је довео до нестабилности процеса, да га отклони, да одлучи шта ће се учинити са партијом производа из које је узет тај узорак, јер је та партија била изложена дејству недозвољених фактора па је зато њен квалитет лошији од квалитета других партија производа. После откривања и отклањања узрока на контролној карти крај одговарајуће тачке назначиће се о ком се узорку радило. Графичко приказивање на контролној карти омогућује да се лако и благовремено уоче неправилпости у процесу ако се утврди неуобичајни распоред тачака на контролној карти (на пример, уколико се уочи низ тачака које све падају у близину једне од контролних граница, или дуг низ тачака које претежпо су изнад или претежно испод централне линије, или низ тачака које показују тренд сталног пораста или сталног пада).

6. КОРЕЛАЦИОНА АНАЛИЗА

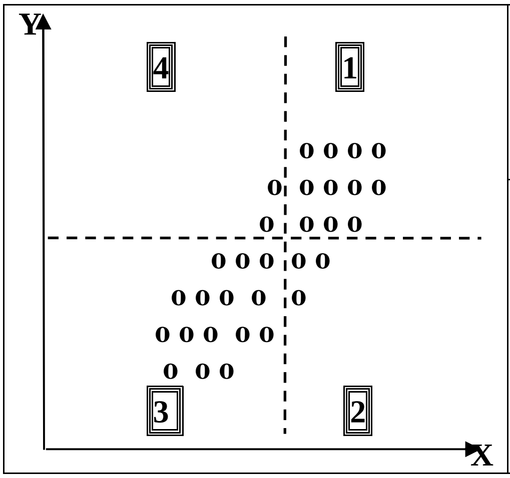
Дијаграм корелације има за циљ да изучи однос две величине које се истовремено мере у неком процесу. При томе свака од посматраних величина има своју произвољну-случајпу варијацију. За разлику од њега дијаграм регресије има за циљ да изучи утицај неке величине коју одређује оператор на неку величипу која се мери и која има своју произвољну-случајну варијацију. Оба ова дијаграма представљају се на истоветан начин, а у даљем тексту ограничићемо се на дијаграм корелације.

За контруисање дијаграма корелације треба најпре у табелу унети најмање 30 парова података, а затим на милиметарском папиру исцртати и степеновати две осе дијаграма. На апцису се наносе подаци који се односе на узроке, а на ординату подаци који се односе на последице. Тиме се добијају парови података.

Интерпретација дијаграма корелације, у неким случајевима, је лака јер је корелација врло видљива на дијаграму, када је облачак тачака веома издужеп. Са друге стране ако је облачак кружпог облика то је доказ на корелација не постоји. За закључивање да ли корелација постоји или не користи се метода теста знакова. У том циљу на дијаграму корелације, најпре, треба повући хоризонталпу и вертикалпу тежишпу линију дистрибуција.Тако добијене зоне обележавају се цифрама: 1, 2, 3, 4. Затим се преброје тачке у свакој зони и добијени подаци унесу у квадрирапу табелу. Уколико је нека тачка на тежишпој линији она се не броји.

Даља процедура обухвата:

1. Сабирање изпоса из зоне 1 и 3 са једне стране, и зона 2 и 4 са друге стране,
2. Сабирају се овако добијена два изпоса и на тај начин се добија укупап број тачака- n дијаграма корелације, искључујући оне које се налазе на тежишним линијама.
3. Из табеле 6.1. теста знакова узима се лимит који одговара броју (n). У нашем примеру (слика 6.1) броју тачака n = 31 одговара из табеле 6.1. лимит од 9 тачака.
4. Уколико је најмањи од резултата (1+3) и (2+4) мањи од лимита, треба закључити да је у питању корелација, што је случај у нашем примеру (слика 6.1) где је најмањи збир 5, а лимит 9. У супротпом случају треба закључити да је реч о некорелацији.



Пребројавање тачака-поена

2	**11**
15	**3**

Прорачун поена

(1) + (3) = 11 + 15 = 26
(2) + (4) = 3 + 2 = 5
n = 26 + 5 = 31

Слика 6.1. Дијаграм корелације

Табела 6.1.Тест знакова

n	***лит***	***n***	***лит***	***n***	***лит***	***n***	***лит***
9	1	27	7	45	15	63	23
10	1	28	8	46	15	64	23
11	1	29	8	47	16	65	24
12	2	30	9	48	16	66	24
13	2	31	9	49	17	67	25
14	2	32	9	50	17	68	25
15	3	33	10	51	18	69	25
16	3	34	10	52	18	70	26
17	4	35	11	53	18	71	26
18	4	36	11	54	19	72	27
19	4	37	12	55	19	73	27
20	5	38	12	56	20	74	28
21	5	39	12	57	20	75	28
22	5	40	13	58	21	76	28
23	6	41	13	59	21	77	29
24	6	42	14	60	21	78	29
25	7	43	14	61	22	79	30
26	7	44	15	62	22	80	30

7. ПАРЕТОВ ПРИНЦИП

У нашој пракси у новије време започела је примена "нових" статистичких метода: Паретовог принципа, узрочно-последичног дијаграма, корелације две карактеристике и поређења два нивоа рангова. Све оне једноставне су и уз њихову примену брже се долази до жељених података.

Парето метода спада у седам основних алата квалитета.Принцип је формулисао Вилфредо Парето, италијански економиста и социолог (1848-1923), а може се исказати на следећи начин: *Посматрајући учинак неке групе особа или предмета, често се уочава да неки мали број има велику важпост, док неки велики број има малу важпост. По Парету важи принцип 80/20,* који каже да постоји витална мањина и употребљива већина. *На пример, врло је често да 20 % клијената неког предузећа вреди за 80 или више % броја послова-прихода,* 20% грешака у ПС-у троши 80% новца, 20% активности које раде у ПС троше 80% времена, итд.

Паретовим дијаграмом се може доћи лако до приоритетпог проблема, који се тиче квалитета, с обзиром да највећи трошак неквалитета обично се везује за мали број узрока. Ради тога када извршимо Контролу неког производа направимо табелу процената учешћа појединих мана (дефеката) у укуппом броју мана. Рећањем процента учешћа мана по опадајућем реду с лева на деспо дијаграм се може поделити на три дела (АБЦ метода-дијаграм). *У првом делу (А) је 70-80% укупних мана. У другом делу (Б) је 10-20% укупних мана, а у трећем (Ц) око 10% укупних мана.*

Паретов дијаграм први пут је у управљању квалитетом увео Јуpan у Јаpanу 1954. године, у једној студији, при утврђивању предности побољшања квалитета и продуктивпости. После тога су се користила два типа ових дијаграма:

♦ ***дијаграм фрекфенција,*** код кога је апциса фрекфенца односно % дефеката, и

♦ ***дијаграм трошкова,*** код кога се на апцису наносе трошкови на отклањању дефеката и он даје непосредан увид у уштеде које треба остварити, па је због тога и погоднији за практично коришћење.

Очевидно је да Парето дијаграми указују на изборе који су на располагању, а који се могу искористити за утврђивање приоритета у пословним системима. Парето дијаграм је могуће користити за:

• Одређивање најважнијих потреба купаца,
• Одређивање виталне мањине неусаглашености,
• Одређивање активности које стварају највеће трошкове,
• Одређивање најзначајнијих купаца,

• Одређивање вештина које су потребне запосленима,

• Одређивање најбољих прилика за инвестирање,

• Одређивање 20% становишта који чине 80% штетног утицаја на животну средину,

• Одређивање најзначајнијих процеса,

• Одређивање 20% хазарда који доводе до 80% повреда,

• Одређивање дужника са највећим дуговањима,

• Одређивање места са највећим губицима и слично.

Конструисање Парето дијаграма врши се кроз следеће кораке:

• Корак 1 – ***Прикупљање необрађених података.*** Навођење сваке категорије и у њој одговарајућег броја података.

• Корак 2 – ***Обрада података.*** Категорије података поређати у опадајућем низу с лева на десно.

• Корак 3 – ***Обележавање вертикалне осе – ординате.*** На ординати се обележавају једнаки интервали, од 0 до заокруженог броја једнаког или већег од броја, који представља збир бројева који су асоцирани уз све категорије.

• Корак 4 – ***Обележавање хоризонталне осе – апцисе***. На апциси се обележавају једнаке ширине свих правоугаоника и означавају категорије од највеће ка најмањој. Категорија „остало“ може да искористи да се у њој прикаже неколико мањих скупова података. Ако су имена категорија сувише дугачка, треба их означити са А, Б, Ц итд. и обезбедити легенду којом се објашњава њихово значење.

• Корак 5 – ***Цртање правоугаоника за сваку од категорија.*** Висина сваког правоугаоника треба да буде једнака броју који одговара свакој категорији. Ширине правоугаоника треба да буду идентичне.

• Корак 6 – ***Израчунавање кумулативног броја за сваку од категорија.*** Кумулативни број за сваку од категорија представља збир бројева који је придружен тој категорији и бројева који су придружени свим већим категоријама.

• Корак 7 – ***Цртање кумулативне криве.*** За сваку од категорија се ставља тачка која означава кумулативни број за ту категорију и која се налази изнад правоугаоника који представља број придружен тој категорији. Кумулативне тачке се повезују линијом.

• Корак 8 – ***Додајте наслов, легенду и датум.***

• Корак 9 – ***Анализа дијаграма.*** Пажњу обратити на прекидну тачку на кумулативној кривој, која означава значајну промену у току дијаграма и раздваја виталну мањину од тривијалне већине.

Данас се ова активност може реализовати у Екселу или неком другом софтверу за обраду података.

Пример 7.1. Практична примена ове методе дата је примеру Контроле рукохвата затварача Г 1/2" водосанитарних арматура (табела 7.1, слика 7.1. и слика 7.2) (Ђуричић Р.М., 2015).

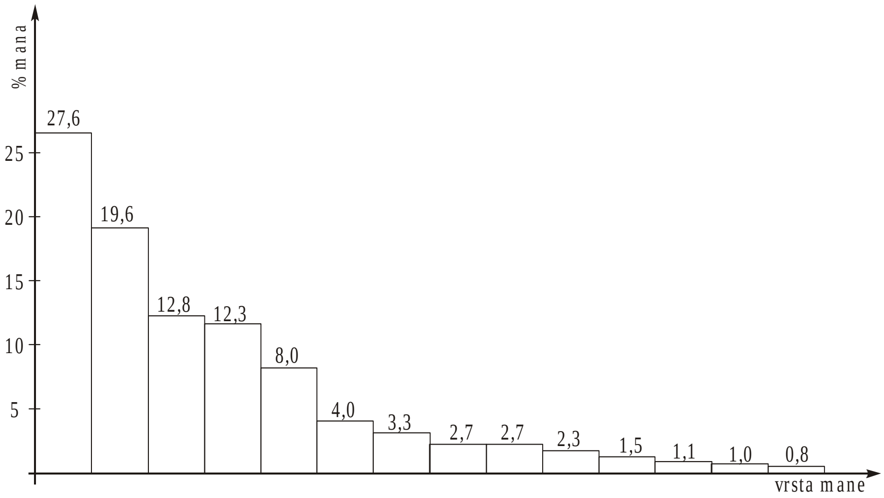
Са слике 7.1. видимо да 27% укупних мана отпада на димензију $\phi 27^{+0.2}$. Из записника о контролисању из кога су узимани подаци видело се да је ова димензија потпуно неисправна. Такође, уочавамо да још око 70% укупних мана отпада на четири мане (15, 4, 7 и 8). С обзиром да су ове мане најзаступљеније на њих треба обратити посебпу пажњу.

Дијаграм релативпог учешћа расподеле појединих мана дат је на слици 7.1. У пракси се често користи дијаграм приказан изломљеном линијом која представља распон, представљеп од највише до најниже класе, а окончава се са 100% (слика 7.2).

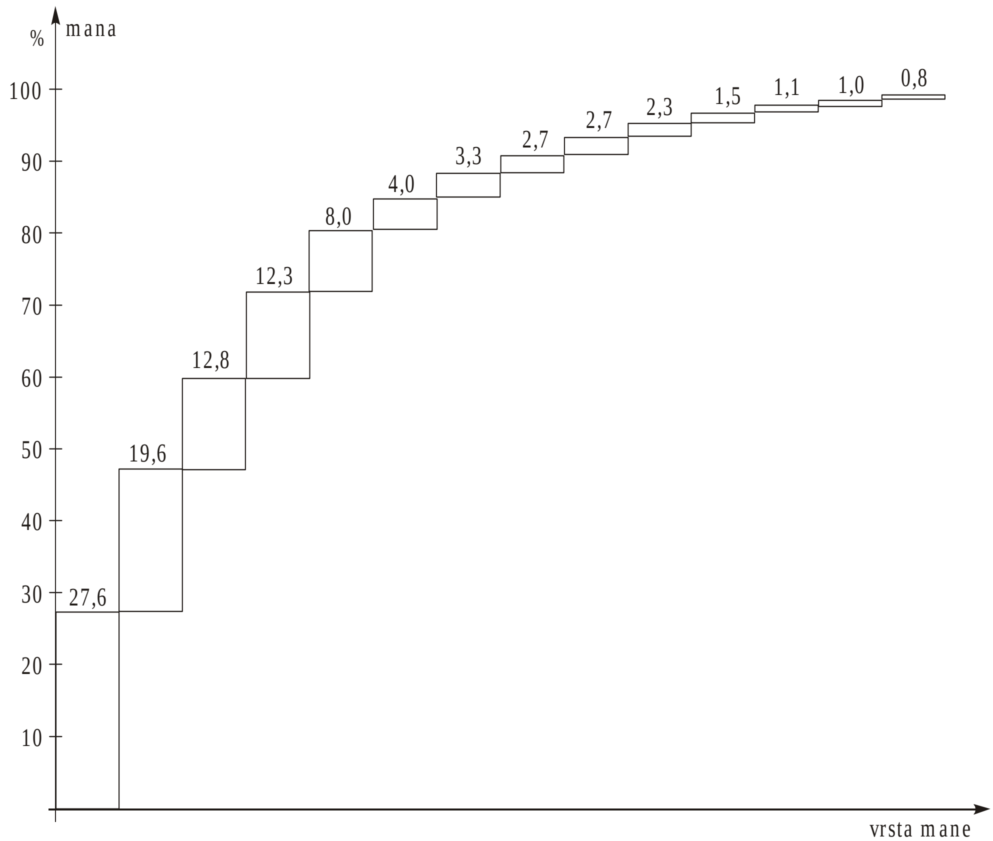
Табела 7.1. Учешће свих мана (С=критично, + = мања мана, - = већа мана)

ВРСТА МАНЕ	УЗОРАК										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ/ %
Кутија са картонским преградама (-)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20/2,7
Назив произвођача (-)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20/2,7
Прскотине, ломови, усахлине (С)						5	4		3	5	17/2,3
Видљиве ивице, спајање материјала преко 0,1мм (+)	5	20	2	20	20	20	20	14	13	8	142/19,6
Пуцања на спојевима алата преко 0,1мм (+)			11			20	20			7	58/8,0
Накнадни рисеви, ударци и деформације (+)				5	4	4		3		8	24/3,3
Деформације услед оштећења алата (+)	20	20			20	20			13		93/12,8
Одступање од боје и сјаја (+)			20	7			20	20	2	20	89/12,3
Пуцање на спојевима алата до 0,1мм (-)											0/0
Местимично лечење материјала без деформације (-)	14	15									29/4,0
Прљави комади (-)						3	3				6/0,8
Тачкасте неравнине (-)									7		7/1,0
Трагови уливног система (-)			9		2						11/1,5
19,5±0,2 (С)			2	1	1	2	2				8/1,1
∅27±0,2 (С)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	200/27,6
Σ/ком/%											724/100

Пример 7.2. У једном пословном систему истраживани су губици радног времена из низа узрока (табела 7.2.). За све категорије (кашњења на посао, неочекивана одсуства, туче на послу, употебе дроге/алкохола на послу, непрописно паркирање, вандализам и прекршај у облачењу) су прикупљени подаци и приказани у другој колони у табели 7.2.



Слика 7.1. Дијаграм релативпог учешћа мана



Слика 7.2. Паретов дијаграм

Табела 7.2. Категорије и учесталост података

Категорија	Учесталост
Кашњење	94
Неочекивано одсуство	70
Класични перкиди	38
Туча	20
Дроге/алкохол	14
Непрописно паркирање	8
Вандализам	4
Прекршај	2
Укупно	250

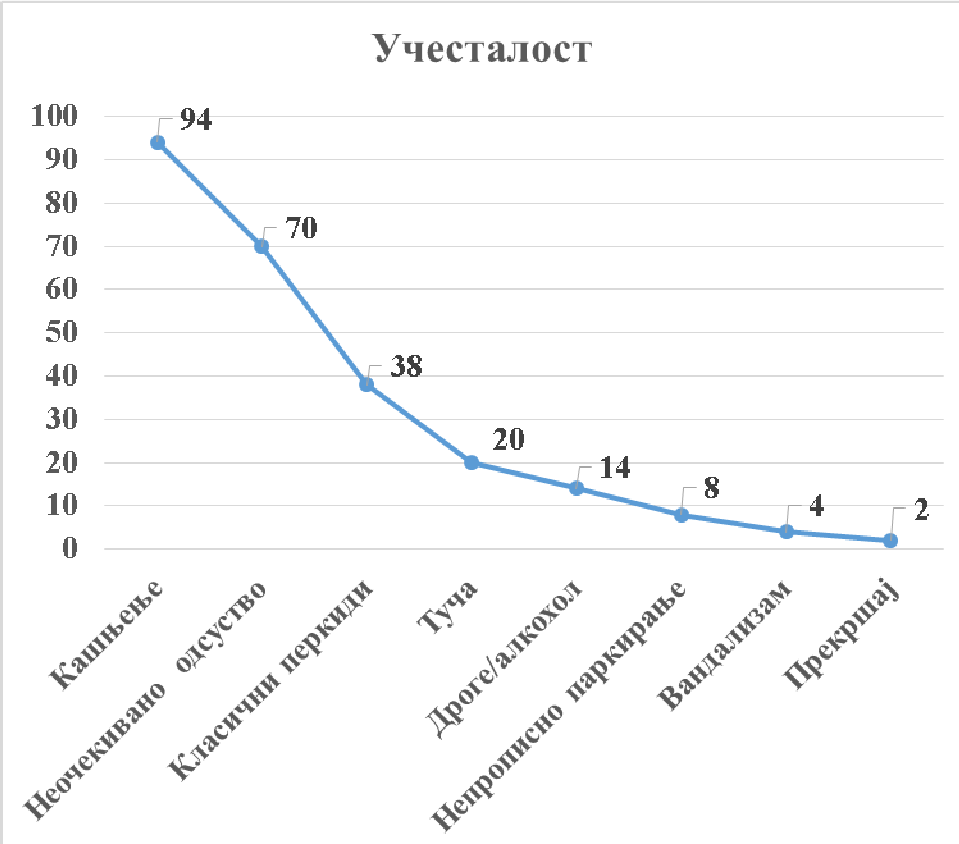
Решење

Израчунавање кумулативне учесталости врши се тако штоп се вредности за прву категорију дода вредност за другу категорију, па се потом тој вредности дода вредност треће категорије и тако редом (табела 7.3). Израчунавање релативне кумулатиивне учесталости се врши тако што се апсолутна вредност кумулативне учесталости подели збиром вредности свих категорија (у овом примеру то је 250) и помножи са 100.

Табела 7.3. Прорачун кумулативне и релативне учесталости

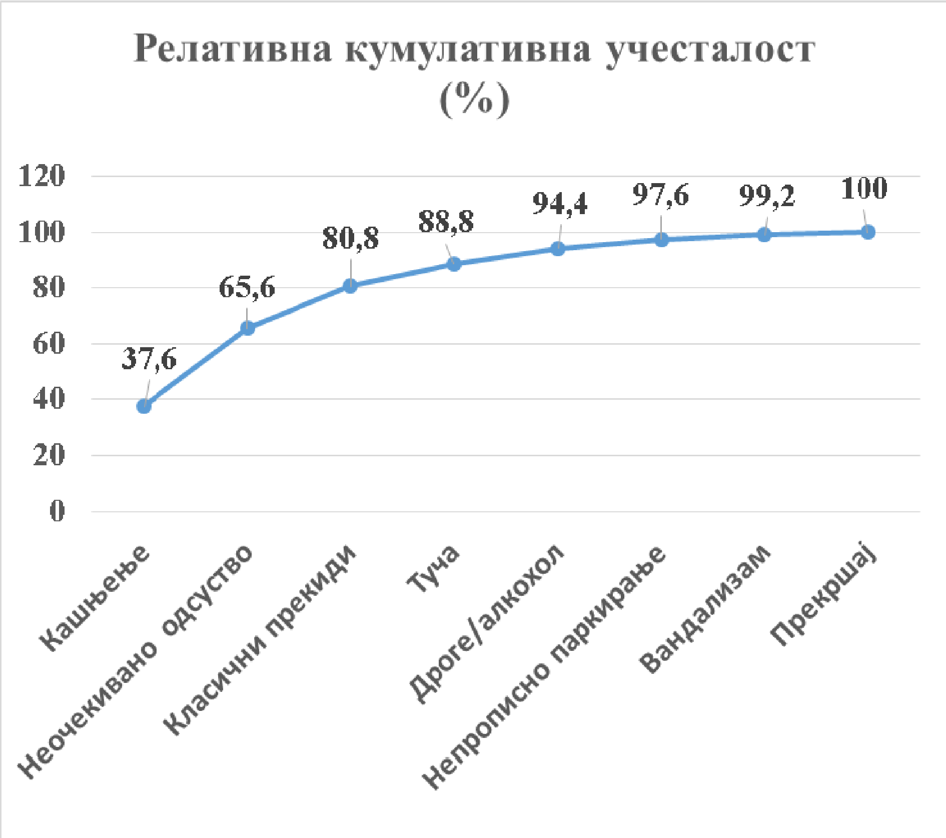
Категорија	**Учесталост**	**Кумулативна учесталост**	**Релативна кумулативна учесталост (%)**
Кашњење	94	94	94/250=37,6
Неочекивано одсуство	70	164	65,6
Класични перкиди	38	202	80,8
Туча	20	222	88,8
Дроге/алкохол	14	236	94,4
Непрописно паркирање	8	244	97,6
Вандализам	4	248	99,2
Прекршај	2	250	100,0
Укупно	250		

Применом Excel 2013 на слици 7.3 приказане су учесталости појединих узрока – категорија одсутва са посла.

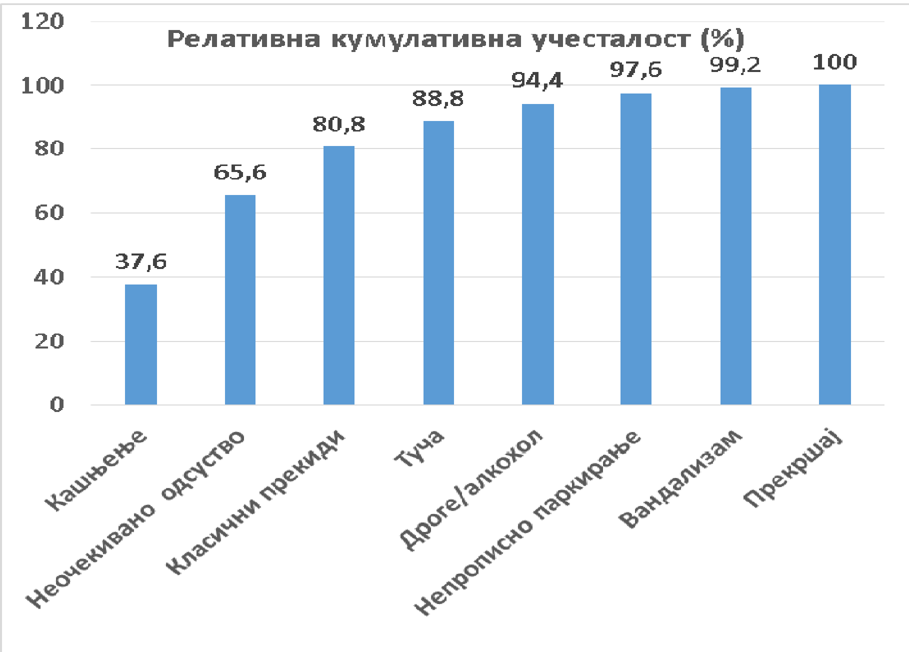


Слика 7.3. Приказ учесталости појединих узрока изостанка с посла

Из табеле 7.3. се види да се вредност кумулативне учесталости повећава од почетне вредности 94, која је једнака вредности прве категорије, до вредности 250, што је заправо збир вредности свих категорија.



Слика 7.4. Приказ релативне кумулативне учесталости



Слика 7.5. Приказ Парето дијаграма за разматрани пример

Са Парето дијаграма (слика 7.5) јасно се виде 3 катеорије које доводе до 80% губитака радног време и те гатегорије треба изучити – наћи узроке и отклобнити их. Када то учини, смањиће губитке радног времена за 80%. Осталих 5 категорија доводе до губитка радног времена од свега 20% и у случају да се фокусира на изналажење и отклањање тих узрока пословни систем ће уштедети само 20% укупног губитка радног времена.

8. ПОРЕЂЕЊЕ ДВА НИВОА

Математички посматрано сваком податку мора бити додељен одређен број ипформација (бројчаних или атрибутивних). Рецимо, успех студената у једном испитпом року - бројка која се приказује у Извештају са полагања за број који су положили испит - додељује се назив предмета, име наставника, датум и време полагања, начин полагања, број пријављених за полагање, број изашлих на испит, број студената по добијеним оценама итд. Ова операција је стална потреба и назива се *стратификација података*.

Једап тип ипформација повезап с једним објектом представља једап фактор (фактор варијације тог податка) и свака ипформација тог типа припада једном нивоу. Час је фактор који има три нивоа: пре подне (06 x 00 - 14x 00), по подне(14x00 – 22x00) и ноћ (22x00 – 06x00).

Поређење два нивоа је, у ствари, поређење карактеристика добијених са два нивоа истог фактора. На пример, рок трајања сијалице чија је нит од два различита материјала. Потребпо је пронаћи границу изнад које ће се разлике карактеристика сматрати сигнификаптним.

До тражене границе долази се помоћу теста поређења рангова. У табели се упосе резултати два узорка. Први узорак има 10 до 20 елемената, а други од 10 до 15 (услов је да је $n_1 \geq n_2$). Метода теста поређења рангова састоји се из пет корака:

1. Формирање таблице са две колоне, које су одвојене међупростором, затим се рангирају резултати два узорка по растућем редоследу.

2. У међупростор се уцртавају стрелице које спајају бројчане показатеље по растућем редоследу.

3. Исписивање рангова врши се у зависпости од резултата. Ако је више истоветних резултата додељује им се просечап ранг и он се исписује као децимал.

4. Израчунава се збир рангова мањег узорка.

5. Добијени резултати (збир рангова) пореде се са табелом теста упоредивости.

Границе које том приликом налазимо у табели узимају се у функцији од n_1 и n_2 (табела 8.1.). Ако се збир рангова налази унутар граница разлике су небитне, а у супротпом оне су значајне.

Помоћу теста поређења рангова испитиване су разлике једног истог производа (нумеричке карактеристике квалитета $42^{=0.25}_{-0.5}$) од два различита произвођача X и Y. У питању је решетка Г 1/2".

Резултати мерења дати су у Табела 8.2, а тест поређења рангова у табели 8.3..

Табела 8.1. Одређивање граница код теста поређења рангова.

A B	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
10	**78** **132**					
11	**81** **139**	**96** **157**				
12	**85** **145**	**99** **165**	**115** **195**			
13	**88** **145**	**103** **172**	**119** **193**	**137** **214**		
14	**91** **159**	**106** **180**	**123** **201**	**141** **223**	**160** **246**	
15	**94** **166**	**110** **187**	**127** **209**	**145** **232**	**164** **256**	**185** **280**
16	**96** **174**	**114** **194**	**131** **150**	**150** **240**	**169** **265**	**190** **290**
17	**100** **180**	**117** **202**	**135** **225**	**154** **249**	**175** **273**	**195** **300**
18	**103** **187**	**121** **209**	**139** **233**	**159** **257**	**179** **283**	**201** **309**
19	**107** **193**	**124** **217**	**144** **240**	**163** **266**	**184** **292**	**205** **320**
20	**110** **200**	**128** **224**	**148** **248**	**168** **247**	**189** **301**	**211** **329**

Табела 8.2. Резултати мерења

Ред број	***Произвођач X***	***Произвођач Y***
1	41,70	41,85
2	41,75	41,85
3	41,80	41,85
4	41,70	41,75
5	41,75	41,75
6	41,75	41,85
7	41,70	41,95
8	41,70	41,95
9	41,70	41,95
10	41,70	41,85
11	41,80	41,85
12	41,80	41,75
13	41,75	41,75
14	41,80	
15	41,80	
16	41,70	
17	41,70	

Табела 8.3. Тест поређења рангова

A = 17			*B* = 13
ранг	*резултат*	*резултат*	*ранг*
4,5	41,70	41,75	12,5
4,5	41,70	41,75	12,5
4,5	41,70	41,75	12,5
4,5	41,70	41,75	12,5
4,5	41,70	41,85	24,5
4,5	41,70	41,85	24,5
4,5	41,70	41,85	24,5
4,5	41,70	41,85	24,5
12,5	41,75	41,85	24,5
12,5	41,75	41,85	24,5
12,5	41,75	41,95	29,0
12,5	41,75	41,95	29,0
19,0	41,80	41,95	29,0
19,0	41,80		
19,0	41,80		
19,0	41,80		
19,0	41,80		
		ЗБИР:	284

Збир рангова мањег узорка B је 284, а границе су 154 - 249 (према табели 7.1 за A = 17 и B = 13), што значи да су разлике у квалитету произвођача X и Y значајне.

Литература

1. Бакија, И., (1979), *Контрола квалитета*, Техничка књига, Загреб
2. Vranić V., (1965), *Vjerojatnost i statistika*, Tehnička knjiga, Zagreb,
3. Dodge I.,H., Roming G.H., (1959), *Sampling Inspection Tables*, 2d.ed. John Wiley end Sonc, Inc., New York,
4. Дружинин Г. В., (1982), *Методи оценки и прогнозированија качества*, Радио и свјаз, Москва,
5. Grant, E.L., (1964), *Statistical Quality Control*, 3d. ed., Mc Graw-hill Bock Kompany, New York, shap 9,
6. Ђуричић, Р.М., (2004), *Менаџмент квалитета*, ИЦИМ плус, Крушевац,
7. Ђуричић, Р. М., Ђуричић, М. Р., (2003), *Савремени менаџмент квалитетом*, „ИР-МИР“, Ужице,
8. Ђуричић, Р. М., (1995), *Принципи савременог управљања квалитетом производа*, „ИР-МИР“, и ВТШ, Ужице,
9. Juran, M.J., Gryna M.G.F., (1970), *Quality Planning and Analysis : From Product Development through Usage*, Mc Craw - Hill Book Company, New York.
10. Јуран М.Ј., (1997), *Обликовањем до квалитета*, „ГРМЕЧ“, Београд,
11. Lederberger A., (1971), *Adaptive Control - Möglichkeiten zur Optimalen von Werzeugmaschienen*, Industrie Abzeiger 93, No 60,
12. Military Standard-105D, (1963, *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*, Washington,
13. Milner D. A., (1975), An Introduction to Adaptive Control, Prod. Eng. 54 , No 3,
14. Станић Ј., (1985), *Управљање квалитетом производње - Методи I*, ИРО "Грађевинска књига", Београд,
15. Смирнов Н. В., Дунин - Барковскиј И. В., (1965), *Курс теории веројатностеј и математическој статистики*, Наука, Москва,
16. Салонин И., (1972), *Математическаја статистика в технологии машиностроенија*, Машиностроение, Москва,
17. Станић Ј., (1997), *Мерење и квалитет обраде - решени примери*, Машински факултет, Београд,
18. Storn R., (1967), *Vahrcheinlichkeitrachnung, Mathematische statistik, Statistische Qualitatskontrole*, VEB. Fashbuohverlag, Leipcig,
19. Поповић Б. З., Камберовић Б. Л., (1985), *Управљање квалитетом производа*, Научна књига,
20. https://support.office.com/sr-latn-rs/article/Statisti%C4%8Dke-funkcije-referenca-624dac86-a375-4435-bc25-76d659719ffd